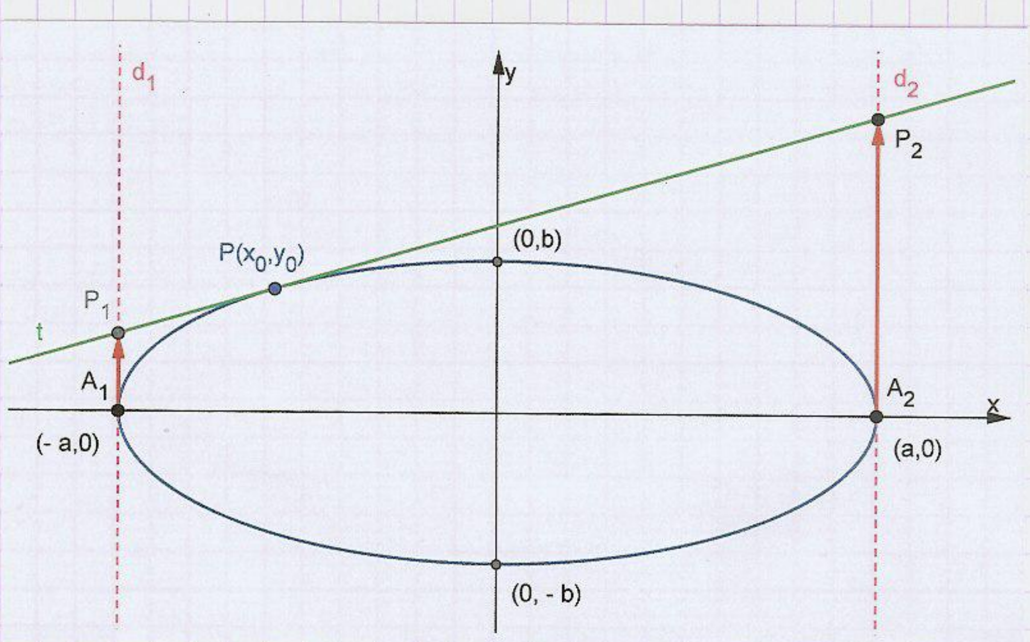
CONIQUES - LIÈGE 1997

Soit une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b $(a>b)$. Soient A_1 et A_2 les sommets du grand axe et d_1 et d_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2. Par un point P de l'ellipse, distinct de A_1 et A_2, on mène la tangente t qui coupe d_1 en P_1 et d_2 en P_2.

Démontrer que $\overrightarrow{A_1P_1} \cdot \overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.



Équation de l'ellipse : $E \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Donc : $y^2 = \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right) \cdot b^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. (1)

Équation de la tangente t à E en $P(x_0, y_0)$:

$$t \equiv y - y_0 = m_t \cdot (x - x_0)$$

avec $m_t = y'(x_0)$.

Prenons la fonction $y(x)$ positive.

$$y'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Donc, $m_t = -\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$. On peut continuer les calculs avec cette expression, mais il est aussi possible de les alléger en tenant compte de (1).

En effet : $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2} \rightarrow \sqrt{a^2-x_0^2} = \frac{a}{b} y_0$.

Et donc : $m_t = -\frac{b}{a} \frac{x_0}{\frac{a}{b} y_0} \rightarrow \boxed{m_t = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}}$

Remarque : ce résultat s'obtient assez rapidement par dérivation implicite de l'équation de l'ellipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2}$$

$$\rightarrow y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

Revenons à l'équation de la tangente :

$$t \equiv y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0) + y_0$$

Pour trouver les coordonnées de P_1 et P_2, cherchons les intersections de t avec $d_1 \equiv x = -a$ et $d_2 \equiv x = a$.

Ordonnée de P_1 : $y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (-a - x_0) + y_0$.

" " P_2 : $y_2 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (a - x_0) + y_0$.

Notons que les vecteurs verticaux $\overrightarrow{A_1P_1}$ et $\overrightarrow{A_2P_2}$ ont pour composantes respectives

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{A_1P_1} \odot \overrightarrow{A_2P_2} = y_1 \cdot y_2$. Effectuons donc ce produit.

$$y_1 \cdot y_2 = \left[\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x_0 + a) + y_0\right] \cdot \left[\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} \cdot (x_0 - a) + y_0\right]$$

$$= \frac{b^4}{a^4} \frac{x_0^2}{y_0^2} (x_0^2 - a^2) + \frac{b^2}{a^2} x_0 (x_0 + a) + \frac{b^2}{a^2} x_0 (x_0 - a) + y_0^2$$

$$= \frac{b^4}{a^4} \frac{x_0^2}{y_0^2} \cdot \frac{-a^2 y_0^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} x_0^2 + \cancel{\frac{b^2}{a} x_0} + \frac{b^2}{a^2} x_0^2 - \cancel{\frac{b^2}{a} x_0} + y_0^2$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} x_0^2 + 2 \frac{b^2}{a^2} x_0^2 + y_0^2 = \frac{b^2}{a^2} x_0^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$$

$$= \cancel{\frac{b^2}{a^2} x_0^2} + b^2 - \cancel{\frac{b^2}{a^2} x_0^2} = b^2$$

Conclusion : $\boxed{\overrightarrow{A_1P_1} \odot \overrightarrow{A_2P_2} = b^2} = c^{te}$ (indépendante de P).