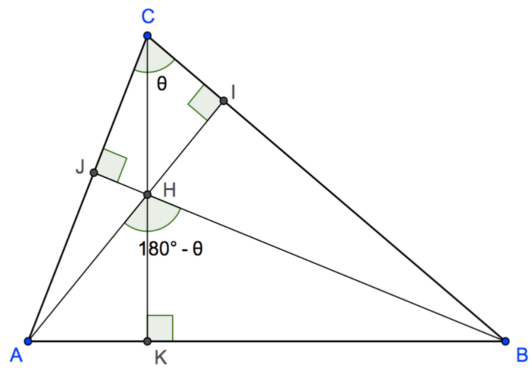
Deux propriétés angulaires dans un triangle

> Dans un triangle ABC , du point C on voit le segment [AB] sous un angle θ .
> Soit H l'orthocentre (*) du triangle. Du point H on voit le segment [AB] sous un angle 180° - θ .



Dans la quadrilatère JHIC , il y a deux angles droits.

La somme des angles du quadrilatère valant 360° , on a pour les deux angles restants :

$$J\hat{H}I + \theta = 180° \quad \rightarrow \quad J\hat{H}I = 180° - \theta \ .$$

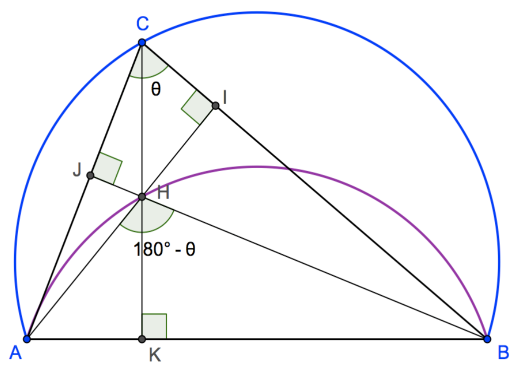
L'angle $A\hat{H}B$ est de même amplitude que $J\hat{H}I$ (angles opposés par le sommet) et donc :

$$A\hat{H}B = 180° - \theta \ .$$

Cette propriété trouve une application dans le problème suivant :

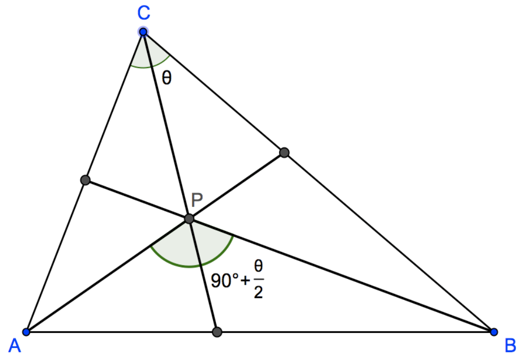
> On donne un triangle ABC dont les sommets A et B sont fixes. Le point C est mobile, mais l'angle $A\hat{C}B$ est constant. Déterminer le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle.

Si l'angle $A\hat{C}B = \theta$ est constant, alors C se déplace sur un arc de cercle de corde [AB] (un des « arcs capables » (**) d'angle θ , en bleu sur la figure ci-dessous).
Comme l'angle $A\hat{H}B = 180° - \theta$ est constant lui aussi, cela signifie que H se déplace sur un des arcs capables de corde [AB] et d'angle $180° - \theta$ (en violet).



(*) Point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle.
(**) Voir cours de compléments de mathématique, pages 54 - 59 .

Dans un triangle ABC , du point C on voit le segment [AB] sous un angle θ .
Soit P l'intersection des bissectrices intérieures du triangle [(*)].
Du point P on voit le segment [AB] sous un angle $90° + \dfrac{\theta}{2}$.



D'abord : $A\hat{P}B \quad = \quad 180° - \dfrac{B\hat{A}C}{2} - \dfrac{A\hat{B}C}{2}$ (puisque nous considérons les bissectrices).

Ensuite : $A\hat{C}B \quad = \quad 180° - B\hat{A}C - A\hat{B}C$

$$= \left(180° - \frac{B\hat{A}C}{2} - \frac{A\hat{B}C}{2}\right) - \frac{B\hat{A}C}{2} - \frac{A\hat{B}C}{2}$$

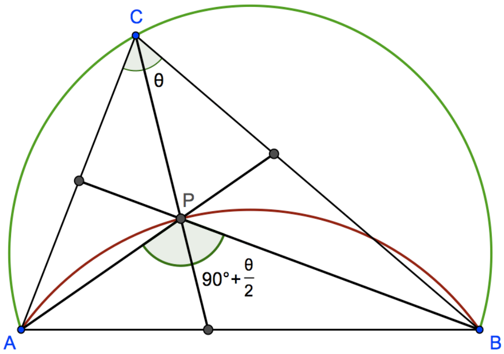
$$= A\hat{P}B - \left(\frac{B\hat{A}C}{2} + \frac{A\hat{B}C}{2}\right)$$

$$= A\hat{P}B - \left(180° - A\hat{P}B\right) = 2\,A\hat{P}B - 180° \quad \rightarrow \quad A\hat{P}B = \frac{180° + A\hat{C}B}{2} = 90° + \frac{\theta}{2}$$

Cette propriété trouve une application dans le problème suivant :

On donne un triangle ABC dont les sommets A et B sont fixes. Le point C est mobile, mais l'angle $A\hat{C}B$ est constant. Déterminer le lieu géométrique du centre du cercle inscrit au triangle.

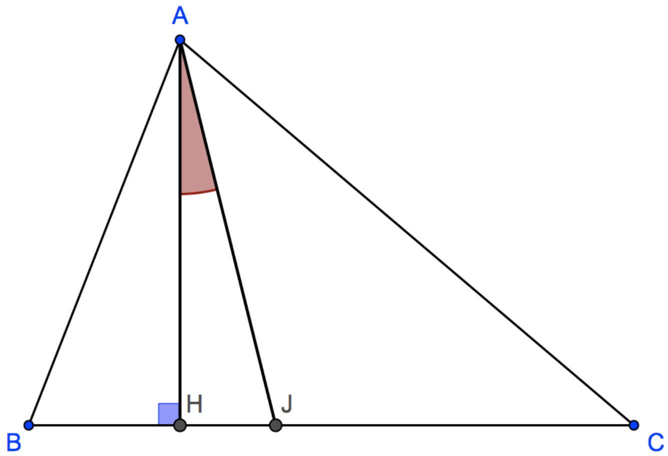
Si l'angle $A\hat{C}B = \theta$ est constant, alors C se déplace sur un arc de cercle de corde [AB] (en vert). Comme l'angle $A\hat{P}B = 90° + \theta/2$ est constant lui aussi, cela signifie que P se déplace sur un des arcs capables de corde [AB] et d'angle $90° + \theta/2$ (en rouge).



[(*)] Ce point est le centre du cercle inscrit au triangle.

Un problème

Dans la figure ci-dessous, le segment [AH] est la hauteur issue du sommet A du triangle ABC , et le segment [AJ] est porté par la bissectrice intérieure de l'angle $B\hat{A}C$.
Démontrez que $H\hat{A}J$ est égal à la demi différence des angles $\hat{C}$ et $\hat{B}$.



Voici une solution possible.

1° $H\hat{A}J = J\hat{A}B - B\hat{A}H = J\hat{A}B - \left(90° - \hat{B}\right)$ (1)

2° $H\hat{A}J = H\hat{A}C - J\hat{A}C = \left(90° - \hat{C}\right) - J\hat{A}C$

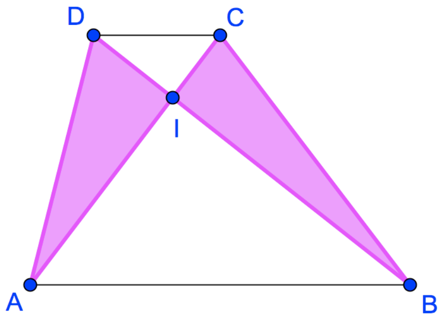
Mais comme $J\hat{A}C = J\hat{A}B$ (AJ est une bissectrice), on a aussi : $H\hat{A}J = \left(90° - \hat{C}\right) - J\hat{A}B$ (2)

Additionnons membre à membre les égalités (1) et (2) :

$$2\,H\hat{A}J = J\hat{A}B - \left(90° - \hat{B}\right) + \left(90° - \hat{C}\right) - J\hat{A}B = \hat{B} - \hat{C} \quad \rightarrow \quad H\hat{A}J = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$$

Le théorème du papillon

Soit un trapèze ABCD avec AB // CD . Les diagonales du trapèze se coupent au point I . Démontrez que les triangles AID et BIC ont la même aire.



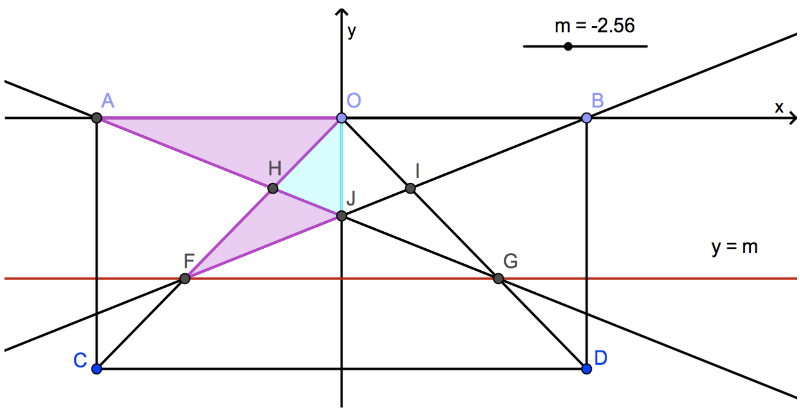
La démonstration [*] est assez simple (ne la lisez pas tout de suite, faites-la vous mêmes).

Ce n'est pas une propriété fondamentale, mais elle enrichira votre base d'images mentales en géométrie. Et cela peut être bien utile, comme dans le problème suivant, que nous avions commencé en classe.

Géométrie - UMons 2019

Dans un repère orthonormé d'origine O , les points $A(-\alpha,0)$, $B(\alpha,0)$, $C(-\alpha,-\alpha)$ et $D(\alpha,-\alpha)$ (avec $\alpha > 0$) forment le rectangle ABDC.
Soient les points mobiles G et F appartenant respectivement aux droites OD et OC de telle sorte que les ordonnées de G et de F soient égales.
L'intersection de AG et de OC est nommée H , celle de FB et de OD est nommée I .
L'intersection de AG et de FB est nommée J .

1. Représenter la situation.
2. Par la géométrie analytique, déterminer où G et F doivent se trouver pour que le triangle HOJ soit isocèle en O .
3. Par la géométrie synthétique, déterminer où G et F doivent se trouver pour que l'aire du triangle AOH soit égale à celle du triangle FJH .
4. Dans la situation précédente (3), exprimer l'aire du triangle OHJ en fonction de α .



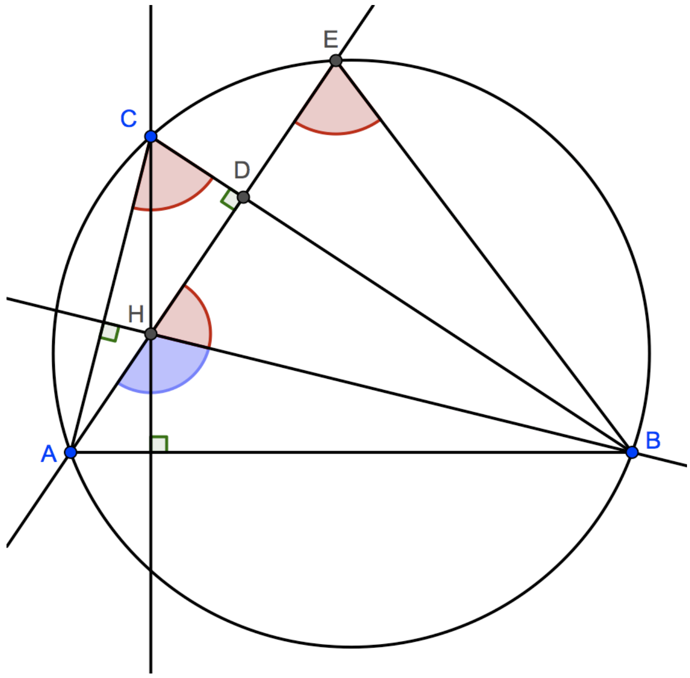
Répondons à troisième question. La figure montre un papillon dont les ailes AOH et FJH n'ont pas la même aire. Pour cela, il faudrait que le quadrilatère AOJF soit un trapèze et donc que le point F se trouve en C (et le point G en D).

[*] Les triangles ABC et ABD ont la même aire car ils ont une même base [AB] et une même hauteur (celle du trapèze). Si de ces deux triangles, on enlève une même surface (le triangle AIB), il restera la même chose !

Encore un problème (UMons - énoncé adapté)

Soient un triangle ABC , le point H son orthocentre, et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de A coupe le côté [BC] au point D et le cercle $\mathscr{C}$ au point E . Démontrez que $\lvert HD \rvert = \lvert DE \rvert$.

Représentons la situation.



Notre attention peut être attirée par les triangles rectangles BDH et BDE , qui ont le côté [BD] en commun.
Démontrer que $\lvert HD \rvert = \lvert DE \rvert$ revient à prouver que ces deux triangles sont isométriques.

D'abord, nous avons $A\hat{C}B = A\hat{E}B$ car ces deux angles inscrits au cercle interceptent la même corde [AB] (*).

D'autre part $A\hat{H}B = 180° - A\hat{C}B$ (voir page 1).

Et comme $B\hat{H}D = 180° - A\hat{H}B$ (leur somme est l'angle plat), nous trouvons $B\hat{H}D = A\hat{C}B = A\hat{E}B$.

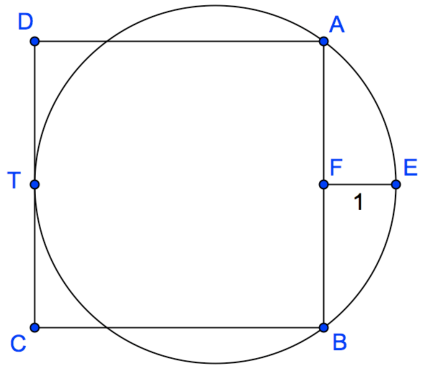
Les triangles BDH et BDE , ayant trois angles égaux deux à deux et un côté commun sont isométriques. Par conséquent, en tant que côtés homologues : $\lvert HD \rvert = \lvert DE \rvert$.

(*) Cours de compléments de mathématique, page 51 (propriété 2).

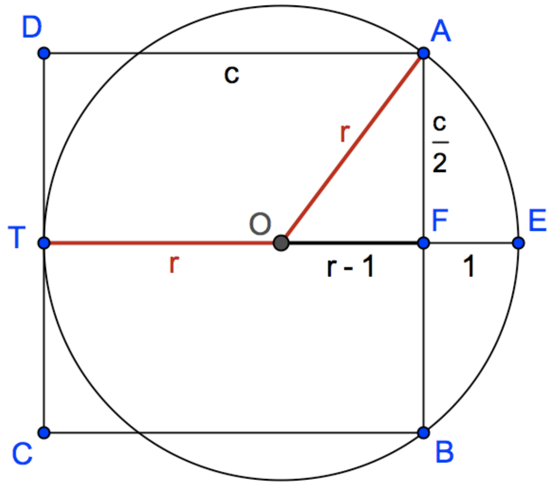
Et pour finir, la solution du problème de « géométrie - algèbre »

Les sommets A et B du carré ABCD appartiennent à un cercle.
Le côté [CD] est tangent à ce même cercle en T .
Sachant que la flèche de la corde [AB] mesure 1 , calculez le côté du carré.

Remarque : la flèche est le segment reliant le milieu de la corde (F) au milieu de l'arc (E) .



Solution



Soit c le côté du carré et r le rayon du cercle. Soit O le centre du cercle.

Nous avons d'abord $c = |TF| = |TO| + |OF| = r + (r-1) \quad \rightarrow \quad c = 2r - 1 \quad (1)$.

Dans le triangle rectangle OFA , nous avons successivement :

$$|OF|^2 + |FA|^2 = |OA|^2 \rightarrow (r-1)^2 + \frac{c^2}{4} = r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 - 2r + 1 + \frac{c^2}{4} = r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{c^2}{4} = 2r - 1 \quad (2) .$$

Comparant (1) et (2) , nous avons $\frac{c^2}{4} = c \quad \rightarrow \quad c\left(\frac{c}{4} - 1\right) = 0 \quad \rightarrow \quad c = 4$ ($c = 0$ à rejeter).