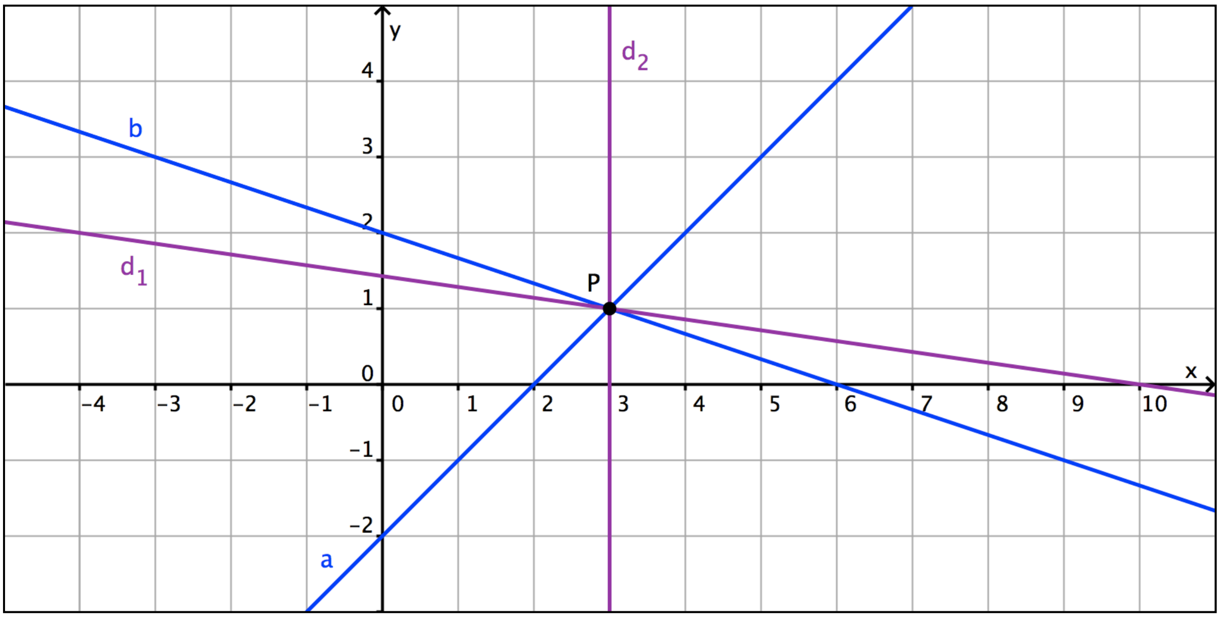
## Faisceaux de droites en géométrie plane

Exemple

Soient deux droites sécantes $a \equiv x - y - 2 = 0$ et $b \equiv x + 3y - 6 = 0$ , représentées en bleu ci-dessous. Elles se coupent au point $P(3,1)$ .




Nous savons bien que les coordonnées de $P$ sont solution de chacune des équations de $a$ et $b$ . Autrement dit, ces coordonnées annulent chacune des expressions $x - y - 2$ et $x + 3y - 6$ .

Si nous considérons une combinaison linéaire des ces expressions

$$k.(x - y - 2) + l.(x + 3y - 6) \quad (k, l \in \mathbf{R}),$$

il est clair qu'elle s'annulera aussi pour les coordonnées de $P$ .

Si les réels $k$ et $l$ ne sont pas simultanément nuls, l'équation $k.(x - y - 2) + l.(x + 3y - 6) = 0$ sera donc celle d'une droite passant par $P$ .

L'ensemble des droites comprenant $P$ est appelé « faisceau de droites comprenant $P$ » .

L'équation d'une droite du faisceau est de la forme $k.(x - y - 2) + l.(x + 3y - 6) = 0$ ( $k, l \in \mathbf{R}$ , non simultanément nuls).

Par exemple, si $k = 1$ et $l = 0$ , nous retrouvons l'équation de $a$ ; si $k = 0$ et $l = 1$ , nous retrouvons l'équation de $b$ . Pour d'autres exemples, prenons d'autres valeurs quelconques :

- si $k = -1$ et $l = 2$ : $-1.(x - y - 2) + 2.(x + 3y - 6) = 0 \Leftrightarrow x + 7y - 10 = 0$ (c'est la droite $d_1$ représentée ci-dessus) ;
- si $k = 3$ et $l = 1$ : $3.(x - y - 2) + 1.(x + 3y - 6) = 0 \Leftrightarrow 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (c'est la droite $d_2$ représentée ci-dessus).

Généralisons …

Soient les droites $a \equiv rx + sy + t = 0$ et $b \equiv ux + vy + w = 0$ , sécantes au point $P$ .

Soient les expressions $A = rx + sy + t$ et $B = ux + vy + w$ .

L'équation d'une droite du faisceau comprenant $P$ est de la forme :

$$k.A + l.B = 0 \quad (k, l \in \mathbf{R}, \text{ non simultanément nuls}).$$

---

## Faisceaux de plans en géométrie spatiale

Exemple

Soient deux plans sécants $\alpha \equiv 2x + y + z = 0$ et $\beta \equiv x - y + z + 1 = 0$ .

Ces plans déterminent donc la droite $d = \alpha \cap \beta$ et les équations cartésiennes de $d$ sont

$$d \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} .$$

Tout point $Q$ appartenant à $d$ possède des coordonnées qui sont solutions de chacune des équations des plans $\alpha$ et $\beta$ .
Ces coordonnées annulent donc chacune des expressions $2x + y + z$ et $x - y + z + 1$ .

Si nous considérons une combinaison linéaire des ces expressions

$$k.(2x + y + z) + l.(x - y + z + 1) \quad (k, l \in \mathbf{R}),$$

il est clair qu'elle s'annulera aussi pour les coordonnées de $Q$ (ainsi que pour celles de tout autre point de $d$ ).

Si les réels $k$ et $l$ ne sont pas simultanément nuls, l'équation $k.(2x + y + z) + l.(x - y + z + 1) = 0$ sera donc celle d'un plan passant par $d$ .

L'ensemble des plans comprenant $d$ est appelé « faisceau de plans comprenant $d$ » .

L'équation d'un plan du faisceau est de la forme $k.(2x + y + z) + l.(x - y + z + 1) = 0$ ( $k, l \in \mathbf{R}$ , non simultanément nuls).

Une petite vérification …

Prenons $k = 5$ et $l = -3$ : $5.(2x + y + z) + (-3).(x - y + z + 1) = 0 \iff 7x + 8y + 2z - 3 = 0$ .

Le plan $\pi \equiv 7x + 8y + 2z - 3 = 0$ contient bien la droite $d$ . En effet, cherchons deux points de $d$ :

- si $x = 0$ , on trouve $y = \frac{1}{2}$ et $z = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow A\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in d$ ;
- si $z = 0$ , on trouve $x = -\frac{1}{3}$ et $y = \frac{2}{3}$ $\rightarrow B\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \in d$ .

On vérifie aisément que $A$ et $B$ appartiennent à $\pi$ et donc que $d \subset \pi$ .

Généralisons …

Soient les plans sécants $\alpha \equiv ax+by+cz+d=0$ et $\beta \equiv ex+fy+gz+h=0$ , dont l'intersection est la droite $d$ .
Soient les expressions $A = ax+by+cz+d$ et $B = ex+fy+gz+h$ .

L'équation d'un plan du faisceau contenant $d$ est de la forme :

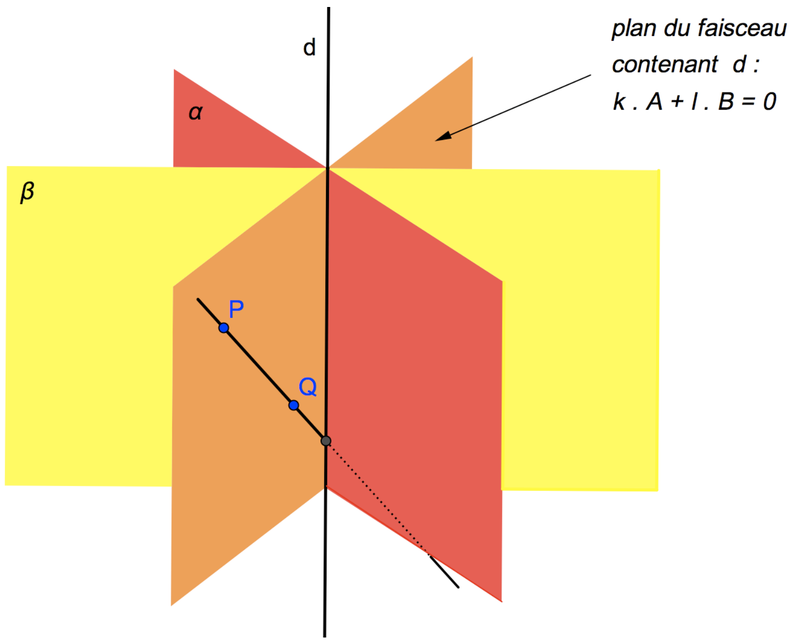
$k.A+l.B=0$ ( $k, l \in \mathbf{R}$ , non simultanément nuls).

---

## Un critère pour déterminer si deux droites sont coplanaires ou gauches

Soient deux plans sécants $\alpha \equiv ax+by+cz+d=0$ et $\beta \equiv ex+fy+gz+h=0$ déterminant la droite $d$ ( $d = \alpha \cap \beta$ ) .
Posons encore $A = ax+by+cz+d$ et $B = ex+fy+gz+h$ .

Nous souhaiterions savoir si une droite $PQ$ est coplanaire avec $d$ ou non.
Supposons que $PQ$ et $d$ soient coplanaires. La droite $PQ$ est donc incluse dans un plan du faisceau contenant $d$ , et l'équation générale d'un plan de ce faisceau est $k.A+l.B=0$ .




Par conséquent, nous avons

$$k.A(P)+l.B(P)=0 \quad \text{et} \quad k.A(Q)+l.B(Q)=0$$

où $A(P)$ est la valeur numérique de l'expression $A$ pour les coordonnées de $P$ , $B(P)$ la valeur numérique de l'expression $B$ pour les coordonnées de $P$ , $A(Q)$ … etc.

Supposons d'abord $k \neq 0$ et $l \neq 0$ . Des égalités précédentes, nous déduisons :

$$A(P) = -\frac{l}{k}.B(P) \quad \text{et} \quad A(Q) = -\frac{l}{k}.B(Q) \ .$$

Nous pouvons écrire cela sous forme vectorielle : $\begin{pmatrix} A(P) \\ A(Q) \end{pmatrix} = -\frac{l}{k}.\begin{pmatrix} B(P) \\ B(Q) \end{pmatrix}$ (*) .

**Conclusion**

Si $PQ$ et $d$ sont coplanaires, alors $\begin{vmatrix} A(P) & B(P) \\ A(Q) & B(Q) \end{vmatrix} = 0$ .

En effet, d'après (*) les colonnes sont multiples l'une de l'autre, et ce déterminant est donc nul.
La contraposée est aussi bien utile :

Si $\begin{vmatrix} A(P) & B(P) \\ A(Q) & B(Q) \end{vmatrix} \neq 0$ , alors $PQ$ et $d$ sont gauches (non coplanaires).

<u>Remarque</u>

Nous avons supposé $k \neq 0$ et $l \neq 0$ . Si $k = 0$ ou $l = 0$ c'est que $PQ$ est incluse dans $\alpha$ ou $\beta$ et elle est donc coplanaire avec $d$ .

---

**Exemple d'application**

Soit la droite $d \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$ et les points $P(4, -1, 0)$ et $Q(10, 2, 3)$ .

Les droites $d$ et $PQ$ sont-elles coplanaires ?

Posons $A = 3x - y + z - 1$ et $B = x + 2y - z + 4$ .

Calculons le déterminant : $\begin{vmatrix} A(P) & B(P) \\ A(Q) & B(Q) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 30 & 15 \end{vmatrix} = 180 - 180 = 0$ .

Les droites sont coplanaires.

Autre exemple : que dire de $d$ et $RS$ si $R(1, 0, 5)$ et $S(7, 1, -1)$ ?

Calculons le déterminant : $\begin{vmatrix} A(R) & B(R) \\ A(S) & B(S) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 18 & 14 \end{vmatrix} = 98 - 0 \neq 0$ .

Les droites $d$ et $RS$ sont gauches.

<u>Dernière remarque</u> : dans la conclusion ci-dessus, il s'agit en fait d'équivalences.

$$PQ \text{ et } d \text{ coplanaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A(P) & B(P) \\ A(Q) & B(Q) \end{vmatrix} = 0$$

$$PQ \text{ et } d \text{ gauches} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A(P) & B(P) \\ A(Q) & B(Q) \end{vmatrix} \neq 0$$