QUELQUES PROBLÈMES (4)

Voici encore quelques problèmes de géométrie posés en 2011 à un examen d'admission de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université de Liège.

Problème 1

On considère un parallélogramme $ABCD$ et une droite d issue de A qui coupe la diagonale $[BD]$ en un point P, le côté $[BC]$ en un point Q et la droite CD en un point R.
Démontrer que l'on a

$$|AP| = \sqrt{|PQ|.|PR|}$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Problème 2

On se place dans un repère orthonormé du plan. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère le cercle C_λ de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe Oy et le cercle Γ_λ de centre (λ, λ) tangent à l'axe Ox.
Démontrer que le lieu des points d'intersection de C_λ et Γ_λ est une union de deux droites et donner les équations cartésiennes de celles-ci.

Problème 3

Soient deux cercles concentriques $\mathscr{C}$ (intérieur) et $\mathscr{C}'$ (extérieur). Un point P fixe est situé sur $\mathscr{C}$.
Une droite mobile d issue de P rencontre $\mathscr{C}'$ en deux points notés A et B.
La droite perpendiculaire à d issue de P rencontre $\mathscr{C}$ en P et en un autre point noté C.
Démontrer que la position du centre de gravité G du triangle ABC est indépendante du choix de d.

Suggestion : calculer le vecteur $\overrightarrow{OG}$, où O est le centre de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$.

Problème 4

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1, passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1,2,3)$ et $(-1,0,2)$, et la droite d_2, passant par les points C et D respectivement de coordonnées $(0,1,7)$ et $(2,0,5)$.

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

b) Déterminer la distance entre d_1 et le plan π.

c) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

d) Déterminer un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que le vecteur joignant P_1 à P_2 soit orthogonal à d_1 et d_2.

Problème 5

On considère une pyramide droite à base carrée $SABCD$ (en d'autres termes, la base $ABCD$ de cette pyramide est un carré et le pied H de la hauteur issue de S est le centre de ce carré).

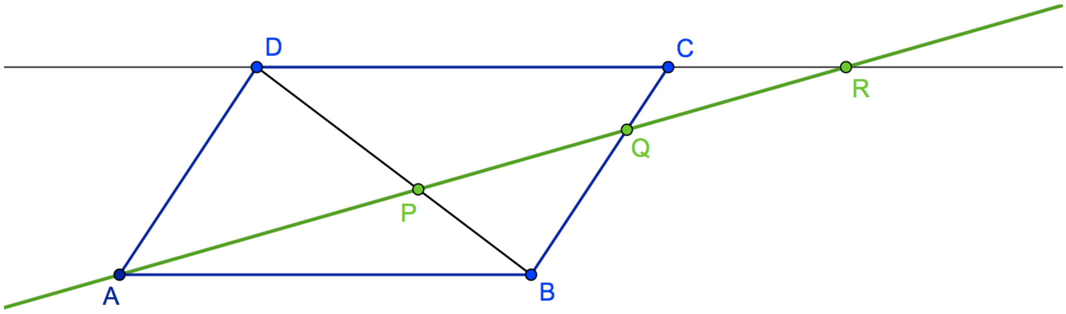
Cette pyramide est telle que $|AB| = |SH|$, où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Cette pyramide est également inscrite dans une sphère (c'est-à-dire que les points A, B, C, D et S sont situés à la surface de cette sphère).

Si V et V' désignent respectivement le volume de la pyramide et de la sphère calculer la valeur du rapport $\frac{V'}{V}$ et en donner une expression indépendante du rayon de la sphère et du côté de la base de la pyramide.

Les solutions qui suivent ne sont sans doute pas optimales. J'accorde davantage d'importance à une explication détaillée en restant proche des acquis des élèves du secondaire.

Problème 1



Démontrer que $|AP| = \sqrt{|PQ|.|PR|}$ revient à prouver que $|AP|^2 = |PQ|.|PR|$ ou encore que

$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|PR|}{|AP|} \quad .$$

Comme nous avons un parallélogramme $ABCD$, les triangles APD et QPB ont des côtés parallèles et ils sont donc semblables.

Donc $\dfrac{|AP|}{|PQ|} = \dfrac{|DP|}{|PB|}$ (1) .

Les triangles APB et RDP sont semblables car ils ont eux aussi des côtés parallèles .

Donc $\dfrac{|PR|}{|AP|} = \dfrac{|DP|}{|PB|}$ (2) . D'après (1) et (2) , nous avons la thèse $\dfrac{|AP|}{|PQ|} = \dfrac{|PR|}{|AP|}$.

Problème 2

Le cercle C_λ de centre $(\lambda, 0)$, tangent à l'axe Oy a donc pour rayon $|\lambda|$.

Son équation cartésienne est ainsi : $C_\lambda \equiv (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$ (1) .

Le cercle Γ_λ de centre (λ, λ) , tangent à l'axe Ox a aussi pour rayon $|\lambda|$.

Son équation cartésienne est ainsi : $\Gamma_\lambda \equiv (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$ (2) .

Les points communs à ces deux cercles s'obtiennent en résolvant le système formé par les équations (1) et (2) . Une possibilité est de les soustraire membres à membres, ce qui donne :

$$y^2 - (y-\lambda)^2 = 0 \quad \to \quad y^2 - y^2 + 2y\lambda - \lambda^2 = 0 \quad \to \quad y = \frac{\lambda^2}{2\lambda} \overset{\lambda \neq 0}{\to} y = \frac{\lambda}{2} \quad .$$

Notons que si $\lambda = 0$, les deux « cercles » sont réduits au point $(0,0)$, c'est leur point commun et il fait donc partie du lieu cherché.

Remplaçons y par $\lambda / 2$ dans (1) : $(x-\lambda)^2 + \dfrac{\lambda^2}{4} = \lambda^2 \quad \to \quad (x-\lambda)^2 = \dfrac{3\lambda^2}{4} \quad \to \quad x - \lambda = \pm\dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2}$.

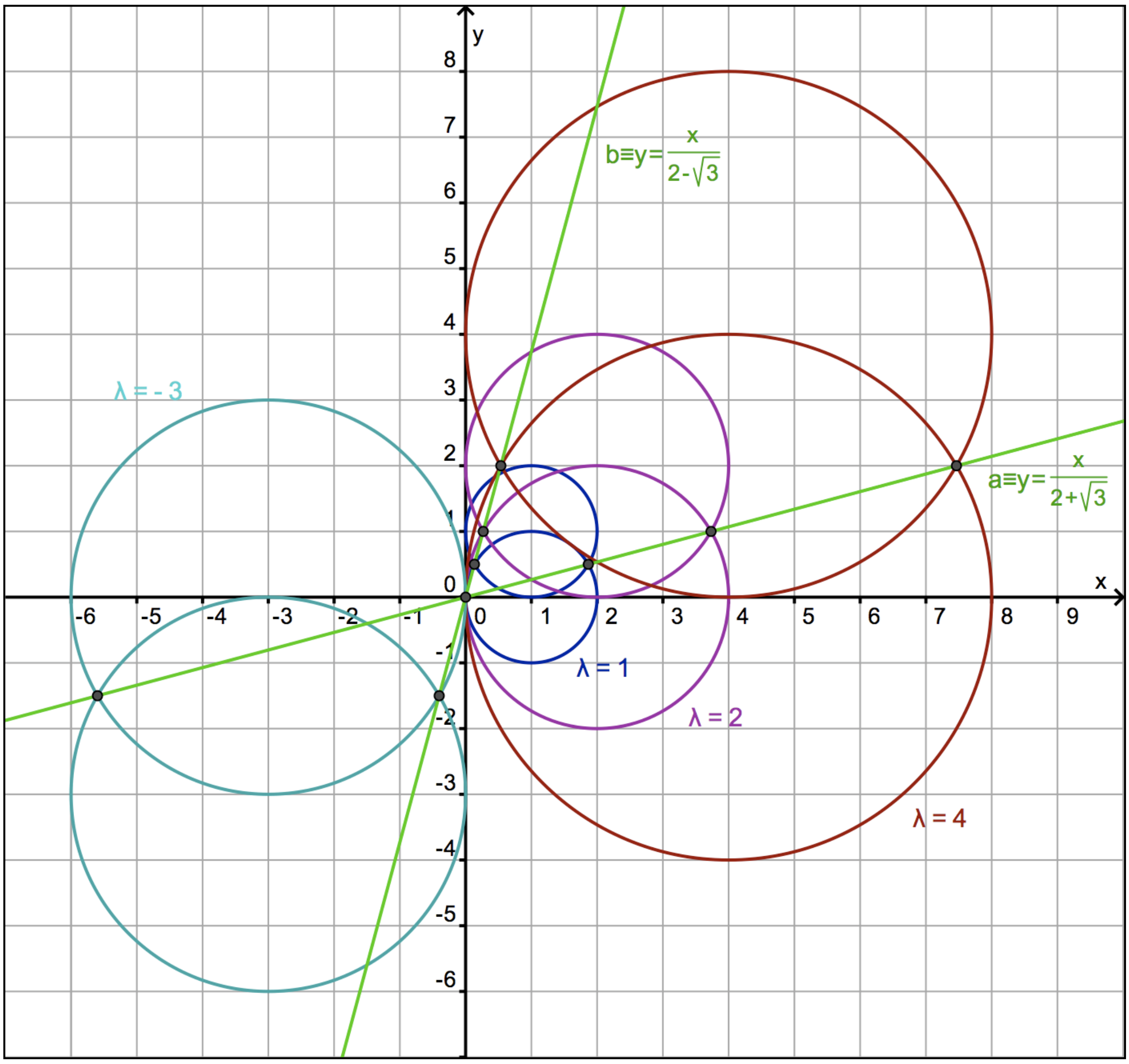
Première possibilité : $x = \lambda + \dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\lambda}{2} \overset{y=\lambda/2}{\to} x = \left(2+\sqrt{3}\right)y \quad \to \quad y = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\,x$.

Seconde possibilité : $x = \lambda - \dfrac{\sqrt{3}\,\lambda}{2} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\lambda}{2} \overset{y=\lambda/2}{\to} x = \left(2-\sqrt{3}\right)y \quad \to \quad y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\,x$.

Le lieu géométrique cherché est la réunion des droites $a \equiv y = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\,x$ et $b \equiv y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\,x$.

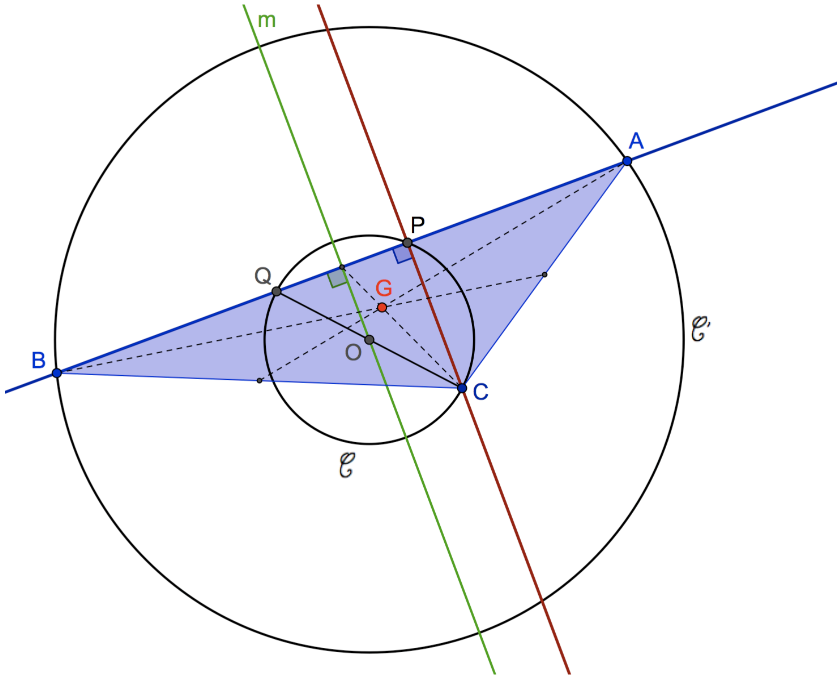
Ci-dessous sont représentés les cercles C_λ et Γ_λ pour $\lambda = -3$, 1 , 2 et 4 .

Leurs points d'intersection appartiennent au lieu qui est la réunion des droites représentées en vert.



Problème 3

Voici d'abord une représentation possible des données du problème.



Nous allons suivre la suggestion proposée en tenant compte du fait que le centre de gravité G d'un triangle ABC satisfait à la relation vectorielle $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ (voir note page suivante).

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}}{3} = \frac{3.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \quad (1)\ .$$

Calculons d'abord $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ car c'est une somme de vecteurs alignés, cela devrait nous permettre de progresser. Notons d'abord Q l'autre point où la droite AB coupe le cercle intérieur $\mathscr{C}$.

Il semble bien que $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BQ}$ (voir figure).

En effet, comme les points A, B, P et Q sont alignés, A et B équidistants de O, P et Q eux aussi équidistants de O, la médiatrice m de $[\,AB\,]$ est aussi celle de $[\,PQ\,]$.
L'image du segment $[\,PA\,]$ par la symétrie orthogonale d'axe m est donc le segment $[\,QB\,]$ de même longueur que $[\,PA\,]$.

Donc, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PQ}$.

Revenons à (1). Nous en sommes maintenant à : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{3.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC}}{3}$.

Calculons maintenant $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC}$.

Par hypothèse $PQ \perp PC$ et le triangle rectangle PQC est donc inscrit dans le demi-cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Le point O étant le milieu de $[\,QC\,]$, nous avons $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC} = 2.\overrightarrow{PO}$.

Finalement : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{3.\overrightarrow{OP} + 2.\overrightarrow{PO}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{3}$.

Le point P étant fixe, le point G est donc fixe aussi ! C'est ce qu'il fallait démontrer.

Le centre de gravité G d'un triangle ABC est le point qui satisfait à la relation vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}} \; .$$

Il s'agit d'un barycentre particulier : celui des points massiques $A(1)$, $B(1)$ et $C(1)$ (chaque sommet du triangle ayant la même « masse »). [1]

Si O est un autre point quelconque, nous avons :

$$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{GO}=-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

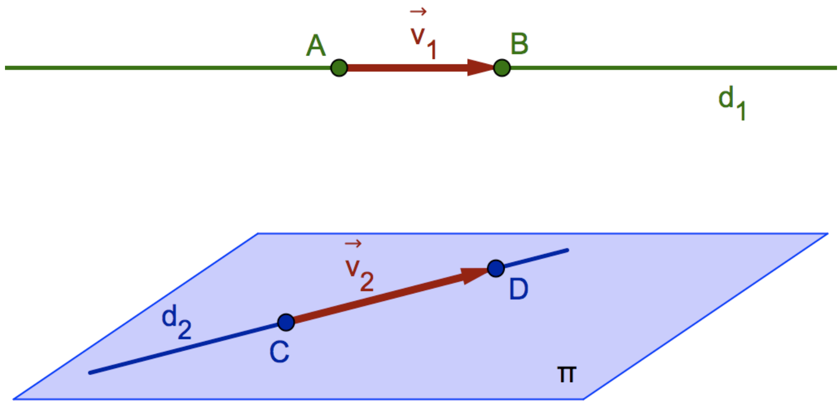
$$\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}} \; .$$

Cette dernière relation est particulièrement utile en géométrie analytique pour trouver les coordonnées du centre de gravité si l'on connaît celles des sommets du triangle :

$$\boxed{G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)} \; .$$

Problème 4

Voici une représentation de la situation avec $A(1,2,3)$, $B(-1,0,2)$, $C(0,1,7)$ et $D(2,0,5)$.



a) Dans ces conditions ($d_1 \mathbin{//} \pi$ et $d_2 \subset \pi$), les vecteurs $\vec{v}_1=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}_2=\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2 , sont aussi des vecteurs directeurs du plan π .

Nous avons $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Pour ne pas trop nous encombrer de nombres négatifs,

prenons $-\vec{v}_1$ et $-\vec{v}_2$ comme vecteurs directeurs de π et utilisons le point $C(0,1,7)\in\pi$.

[1] Voir cours de 5e , compléments de mathématiques, pages 60 à 72.

Avec la méthode du déterminant, une équation cartésienne de π est ainsi donnée par :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Calculons le déterminant par la méthode de SARRUS :

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} x & 2 & -2 & x & 2 \\ y-1 & 2 & 1 & y-1 & 2 \\ z-7 & 1 & 2 & z-7 & 1 \end{array} \right. = 4x+2z-14-2y+2+4z-28-x-4y+4 = 3x-6y+6z-36 \ .$$

Donc $\pi \equiv 3x-6y+6z-36=0$ ou plus simplement : $\boxed{\pi \equiv x-2y+2z-12=0}$.

Remarque : une autre façon de travailler consiste à trouver un vecteur normal de π en effectuant le produit vectoriel de $-\vec{v_1}$ par $-\vec{v_2}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

On en déduit : $\pi \equiv x-2y+2z+t=0$. En utilisant $C(0,1,7) \in \pi$, on trouve t = - 12 .

b) Comme $d_1 \,//\, \pi$, la distance entre d_1 et π est égale à la distance entre un point quelconque de d_1 et π.

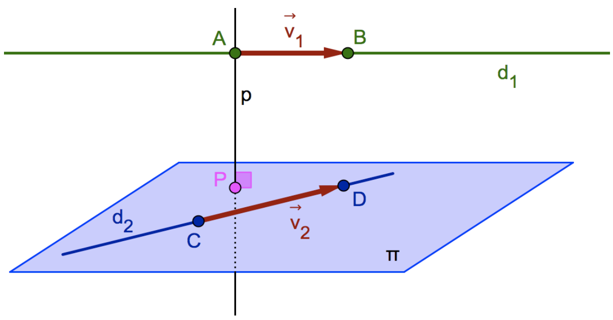
Première possibilité : connaître la formule qui donne la distance entre un point et un plan !

> Dans un repère orthonormé de l'espace, la distance entre le point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et le plan $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule
>
> $$d(A,\pi) = \frac{|\,a x_A + b y_A + c z_A + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ .$$

Dans notre cas, cela donne : $d(d_1,\pi) = d(A,\pi) = \dfrac{|\,1.1-2.2+2.3-12\,|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{9}} = 3$.

Seconde possibilité : si on ne connaît pas la formule, déterminer le point de percée P de la droite p perpendiculaire à π passant par un point de d_1 (le point A par exemple).

La distance entre d_1 et π est la distance entre A et P.



Appliquons cette méthode. Le vecteur $\vec{n}/3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de p .

En utilisant le point $A\,(1,2,3)$ nous pouvons écrire des équations paramétriques de p :

$$p \equiv \begin{cases} x = k+1 \\ y = -2k+2 \quad (\, k \in \mathbf{R}\,) \,. \\ z = 2k+3 \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation de π :

$$(k+1) - 2(-2k+2) + 2(2k+3) - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 9k - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1 \;\; .$$

Et en remplaçant $k = 1$ dans les équations paramétriques, nous trouvons $P(2,0,5)$.

Il suit : $d\left(d_1,\pi\right) = d\left(A,P\right) = \sqrt{\left(2-1\right)^2 + \left(0-2\right)^2 + \left(5-3\right)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$.

c) Si d_3 est orthogonale à d_1 et d_2 , un vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ de d_3 est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Nous pouvons donc prendre $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (voir point précédent).

Comme d_3 comprend le point $C(0,1,7)$, ses équations paramétriques sont : $d_3 \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -2k+1 \\ z = 2k+7 \end{cases}$.

La valeur du paramètre k étant la même dans chacune des équations paramétriques, nous en déduisons des équations cartésiennes :

$$d_3 \equiv x = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-7}{2} \quad \text{ou encore} \quad d_3 \equiv \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 2x - z + 7 = 0 \end{cases} .$$

d) Les résultats précédents montrent que $A(1,2,3) \in d_1$, $P = D(2,0,5) \in d_2$ et que $\overrightarrow{AD}$ est simultanément orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ et donc à d_1 et d_2 .

Les points A et D répondent à la question. Ceci était sans doute voulu par les examinateurs pour faciliter le travail des étudiants.

Quelle méthode utiliser si l'on n'a pas dû résoudre les questions précédentes ?
Voyons une possibilité à la page suivante.

Le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ étant orthogonal aux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, on a $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (*) .

Les équations paramétriques de d_1 et d_2 sont :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = 2k \\ z = k + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} x = -2l \\ y = l + 1 \\ z = 2l + 7 \end{cases} .$$

Nous aurons donc $P_1(2k-1, 2k, k+2)$ et $P_2(-2l, l+1, 2l+7)$.

La relation (*) s'écrit maintenant $\begin{pmatrix} -2l - 2k + 1 \\ l - 2k + 1 \\ 2l - k + 5 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cela nous donne un système d'équations : $\begin{cases} 2k + 2l + \lambda = 1 & (1) \\ 2k - l - 2\lambda = 1 & (2) \\ k - 2l + 2\lambda = 5 & (3) \end{cases}$.

Vous connaissez différentes méthodes pour résoudre ce genre de système [(2)].
On trouve $k = 1$, $l = -1$ et $\lambda = 1$.

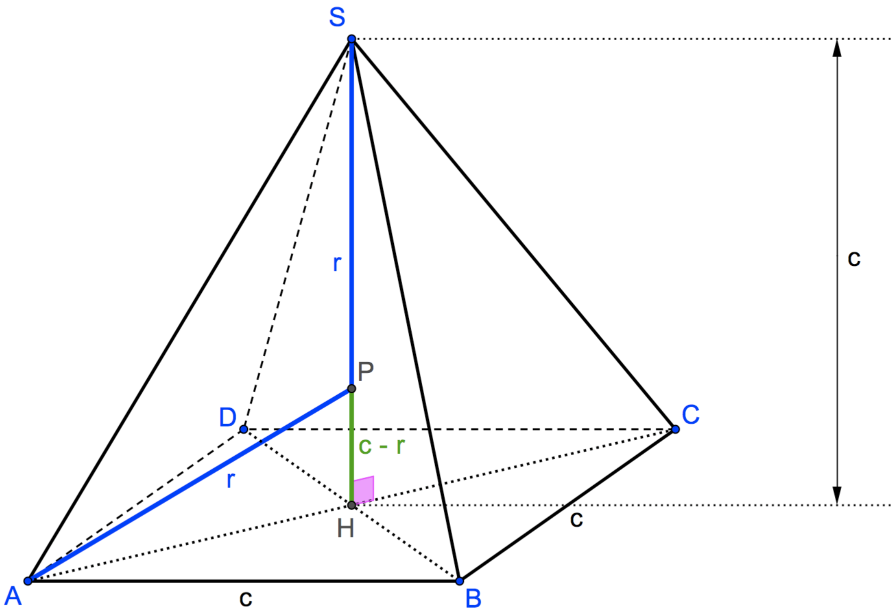
En remplaçant k par 1 dans les équations paramétriques de d_1 et l par - 1 dans celles de d_2 , nous trouvons : $P_1(1,2,3)$ et $P_2(2,0,5)$.

On vérifie pacilement avec le produit scalaire que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est bien orthogonal à

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

[(2)] Voir par exemple, cours de 5[e], Matrices et déterminants, pp 17-18, ou Géométrie analytique de l'espace, pp 29-32.

Problème 5



Le volume de cette pyramide particulière dépend uniquement de c qui est la fois sa hauteur et le côté de sa base carrée. Le volume de la sphère dépend uniquement de son rayon r.
Si nous trouvons la relation entre c et r, nous pourrons calculer le rapport des volumes de ces deux solides.

Soit P le centre de la sphère circonscrite à la pyramide. Ce point appartient au segment [SH].
Comme les points A et S appartiennent à la sphère, nous avons $|AP| = |SP| = r$.
Donc $|HP| = |SH| - |SP| = c - r$.

Dans le triangle rectangle AHP, nous avons : $|AH|^2 + |HP|^2 = |AP|^2$ (1).

La diagonale du carré de base mesure $\sqrt{2}\,c$ et donc $|AH| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c$.

Remplaçons dans la relation (1) :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + (c-r)^2 = r^2 \;\rightarrow\; \frac{c^2}{2} + c^2 - 2cr + r^2 = r^2 \;\rightarrow\; \frac{3c^2}{2} - 2cr = 0 \;\rightarrow\; \frac{3c}{2} - 2r = 0 \;\rightarrow\; r = \frac{3c}{4}\ .$$

Le rayon de la sphère est égal aux ¾ de la hauteur de la pyramide.

Le calcul du rapport V'/V est maintenant facile … [3]

$$\frac{V'}{V} = \frac{V_{sphère}}{V_{pyramide}} = \frac{\frac{4}{3}\pi.r^3}{\frac{1}{3}c^2.c} = \frac{4\pi.\left(\frac{3c}{4}\right)^3}{c^3} = \frac{27\pi}{16} \approx 5{,}3014\ .$$

La sphère contient un peu plus de cinq fois la pyramide.

[3] Le volume d'une sphère est donné par la formule $V_S = 4\pi.r^3/3$ et celui de la pyramide par $V_P = B.h/3$ où B est l'aire de la base et h la hauteur.