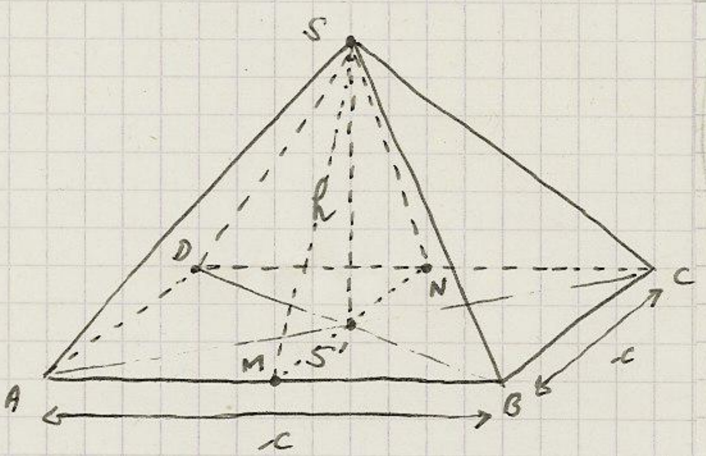
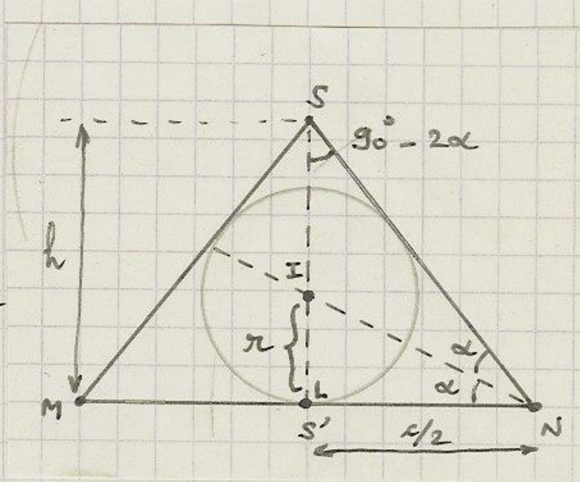
SPHÈRE INSCRITE DANS UNE PYRAMIDE (UMONS - 2017)

Soit une pyramide à base carrée ABCD et de sommet S.

Sa hauteur est h et le côté de la base est c.
On construit la plus grande sphère inscrite dans la pyramide (elle est tangente à toutes les faces de la pyramide).

On demande de rechercher le volume de la sphère en fonction de c et de h.





Dans le Δ rectangle S'IN : $\tan\alpha = \dfrac{r}{c/2} = \dfrac{2r}{c}$ (1)

Dans le Δ rectangle S'SN : $\cot(90° - 2\alpha) = \tan 2\alpha = \dfrac{h}{c/2}$

$\rightarrow \tan 2\alpha = \dfrac{2h}{c}$.

Par la formule de duplication : $\dfrac{\cancel{2}\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{\cancel{2}h}{c}$.

D'après (1) : $\dfrac{\frac{2r}{\cancel{c}}}{1-\frac{4r^2}{c^2}} = \dfrac{h}{\cancel{c}} \rightarrow 2r = h - \dfrac{4h}{c^2}r^2$ (2)

Résolvons (2), équation du second degré d'inconnue r :

$\dfrac{4h}{c^2}r^2 + 2r - h = 0$

$\Delta = 4 - 4.\dfrac{4h}{c^2}.(-h)$

$= \dfrac{4c^2 + 16h^2}{c^2} = \dfrac{4(c^2+4h^2)}{c^2}$

$$\rightarrow r = \frac{-\cancel{2}^{1} \pm \frac{\cancel{2}^{1}}{c}\sqrt{c^2+4h^2}}{\frac{\cancel{8}^{4}h}{c^2}}$$

Seul le signe "+" est à considérer pour le rayon de la sphère :

$$r = \frac{-c^2 + c\sqrt{c^2+4h^2}}{4h} = \frac{c}{4h}\left(\sqrt{c^2+4h^2} - c\right)$$

Volume de la sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3}\pi . \frac{c^3}{64h^3}(\ldots)^3$$

$$\boxed{V = \frac{\pi c^3}{48h^3}\left(\sqrt{c^2+4h^2} - c\right)^3}$$