Synthèse d'algèbre

Yvan Haine

Septembre 2012

Ce recueil d'algèbre a été rédigé suite à une suggestion de M. le Professeur E. Delhez.

Il est destiné à aider les étudiants à préparer l'examen d'admission aux études d'ingénieur civil.

Il reprend la plupart des notions régulièrement reprises parmi les questions habituellement posées.

Son objectif est de proposer une synthèse des définitions et propriétés utiles. Aucun résultat énoncé n'est démontré.

Certaines notions indispensables sont absentes. Par exemple, les notions de puissances, de racines carrées ou $n^{\text{ème}}$, n'y figurent pas mais il serait fou d'en négliger la maîtrise pour présenter l'examen avec succès.

Cependant, il ne faut pas le considérer comme une bible ! Il est certainement pourvu de nombreux défauts : lacunes, imprécisions, manque d'exemples ou d'exercices, illustrations omises, lapsus ou fautes de frappe,...

Une étude par coeur du contenu de ce recueil n'est pas une bonne méthode de se préparer et ne garantit en rien la réussite de l'examen.

Toutes nos excuses pour ces défauts. Nous espérons profiter des commentaires et remarques des utilisateurs pour perfectionner cette première version pour les années ultérieures.

Merci à Thomas Belligoi pour les nombreux exercices et remarques fournies et à Eveline Moitroux pour leurs nombreux conseils judicieux.

Chapitre 1

Signe sommatoire

1.1 Notation

Si $n \in \mathbb{N}$, la somme des n nombres (réels ou non) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est notée $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ou

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

et se lit « somme pour i allant de 1 à n des x_i ».

Le signe Σ (lettre grecque sigma majuscule) est appelé *signe sommatoire* (ou plus couramment signe somme).

La lettre i est l'*indice* du signe sommatoire. Il prend toutes les valeurs entières comprises entre la valeur initiale (ici 1) et la valeur finale (ici n). L'indice peut être un simple numéro (ce qui est généralement le cas en statistiques lorsque les x_i sont des données numériques) ou sa valeur intervient directement dans les différents termes de la somme (par exemple, la somme des n premiers entiers s'écrit $\sum\limits_{i=1}^{n} i$).

1.2 Propriétés

1. L' indice joue un rôle muet càd $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$.
2. Si $1 \leq p \leq n$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} x_i$.

   Cette propriété découle simplement de l'associativité de l'addition des réels.

3. Si a est un réel, alors $\sum_{i=1}^{n} a = n\,a$.
   En effet, la somme des n termes $a + a + \ldots + a$ vaut $n\,a$.
4. Si a est un réel (indépendant de i), alors $\sum_{i=1}^{n} a\,x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i$.
   Cela revient à mettre le facteur a en évidence.
5. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$.
   Cette propriété découle simplement de l'associativité et de la commutativité de l'addition des réels.

1.3 Exercices

1. Sachant que la moyenne d'une série statistique $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vaut $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, prouver que $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2$.
2. Une matrice carrée de dimension n est un tableau de nombres disposés en n lignes et n colonnes. L'élément de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A est noté a_{ij}.
   La matrice A s'écrit $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.
   Exprimer à l'aide d'un signe sommatoire
   (a) la somme des éléments de la 1ère ligne,
   (b) la somme des éléments de la dernière colonne,
   (c) la somme des éléments de la diagonale principale (reliant le coin supérieur gauche au coin inférieur droit),
   (d) la somme de tous les éléments en les groupant ligne par ligne,
   (e) la somme de tous les éléments en les groupant colonne par colonne.

Chapitre 2

Démonstrations par récurrence

2.1 Principe

La démonstration par récurrence s'applique dans le cas où on doit démontrer une proposition P_n pour tout entier $n \geq 0$ ou $n \geq 1$ ou plus généralement $n \geq n_o (n_0 \in \mathbb{N})$.

Une démonstration par récurrence se compose toujours de deux étapes :

1. Initialisation de la récurrence : on démontre que la proposition est vraie pour la plus petite valeur de l'entier n : $0, 1$ ou n_o.
2. Deuxième phase : on suppose que la proposition P_N est vraie et on démontre sous cette hypothèse, appelée hypothèse de récurrence, que la proposition P_{N+1} est vraie. On démontre donc que la propriété est « héréditaire ».

Et c'est seulement lorsque ces deux étapes sont franchies qu'on peut affirmer que la proposition est vraie pour toutes les valeurs entières de $n \geq 0, 1$ ou n_o.
D'un point de vue plus formel, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ est vrai} \\ N \geq 0 \text{ et } P_N \Rightarrow P_{N+1} \end{array} \right. \Rightarrow \forall n \geq 0 : P_n \text{ est vrai.}$$

Dans la formulation ci-dessus, on peut remplacer 0 par 1 ou n_o en fonction des circonstances.

2.2 Exemple

Démontrons la propriété suivante :

La somme des n premiers naturels vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
En utilisant le signe sommatoire, elle s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Initialisation :

  L'assertion est vraie pour $n = 1$ car le 1er membre vaut 1 et le 2e vaut $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$.
- Hérédité :

  Hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$

  Thèse : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

  Dém : On a successivement

  $$\sum_{k=1}^{N+1} k = \sum_{k=1}^{N} k + (N+1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) \text{ vu l'hypothèse de récurrence.}$$

  Dès lors, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} k = \frac{N(N+1)+2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$.
- Puisque la propriété est vraie pour $n = 1$, elle est vraie successivement pour $n = 2, 3, 4, \ldots$ vu que l'hypothèse de récurrence est héréditaire.

2.3 Précautions à prendre !

Dans une démonstration par récurrence, il est fondamental de démontrer les deux étapes (initialisation et hérédité).

Voici deux exemples qui illustrent ce fait.

1. Considérons l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}, \forall n \geq 1$.
   - Initialisation :

     La propriété est vraie pour $n = 1$ car le 1er membre vaut 1 et le 2e vaut $\frac{5-7+4}{2} = 1$.
   - Hérédité :

     Hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{5N^2 - 7N + 4}{2}$

     Thèse : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \frac{5(N+1)^2 - 7(N+1) + 4}{2}$

     Dém : On a successivement

$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 + (N+1)^2 = \frac{5N^2 - 7N + 4}{2} + (N+1)^2$ vu l'hypothèse de récurrence

et on a dès lors $\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \frac{5N^2 - 7N + 4 + 2(N^2 + 2N + 1)}{2} = \frac{7N^2 - 3N + 6}{2}$.

Et le 2nd membre vaut $\frac{5(N^2 + 2N + 1) - 7N - 7 + 4}{2} = \frac{5N^2 + 3N + 9}{2}$.

La propriété n'est donc pas héréditaire. En fait, elle est valable pour $n = 1, 2$ et 3 et fausse pour des valeurs supérieures à 3.

2. Envisageons l'assertion : $7^n + 1$ est un multiple de 6.

   Démontrons que la propriété est héréditaire.

   Hypothèse de récurrence : $7^N + 1 = 6k$ où k est entier.

   Thèse : $7^{(N+1)} + 1$ est un multiple de 6.

   Dém : $7^{(N+1)} + 1 = 7 \cdot 7^N + 1 = 7(6k - 1) + 1 = 42k - 6 = 6(7k - 1)$ est un multiple de 6 car $7k - 1$ est un entier.

   Mais cela ne signifie pas que la propriété est vraie. En effet, pour $n = 1$, l'égalité $7^n + 1 = 8$ n'est pas vraie. Il en est de même pour $n = 2, 3, ..., 30$ (à vérifier avec un tableur par exemple !).

   Si on arrive à déterminer un entier n_o pour lequel la propriété est vraie, alors la propriété sera vraie pour tout $n \geq n_o$!

2.4 Exercices

Plusieurs propriétés données ci-dessous peuvent aussi se démontrer sans raisonnement par récurrence.

1. Démontrer que $4^n + 2$ est un multiple de 3 pour tout naturel n.
2. Démontrer que $n^2 + n + 2$ est pair si n est un naturel (3 méthodes).
3. Démontrer que $12^n - 5^n$ est multiple de 7, $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que $9^n - 1$ est multiple de 8, $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
5. Démontrer que $5^n \geq 1 + 4n, \forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}$.
6. Démontrer que $2^n \geq n^2$ pour tout naturel $n \geq 4$.
7. Démontrer que pour tout naturel n, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ si $x \geq -1$.

8. Démontrer que la somme des carrés de n premiers naturels (S_2) vaut $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
9. Démontrer que la somme des cubes des n premiers naturels (S_3) vaut le carré de la somme des n premiers naturels :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
10. Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.
11. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
12. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
13. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
14. Démontrer que $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{4^2-1} + \ldots + \dfrac{1}{(2n)^2-1} = \dfrac{n}{2n+1}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
    Écrire l'égalité à l'aide d'un signe sommatoire.
15. Démontrer que $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots - \dfrac{1}{n} = 2\left(\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+4} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right)$ si n est pair.
    Écrire l'égalité à l'aide d'un signe sommatoire.
16. Démontrer la formule de dérivation
$$(x^m)' = m\, x^{m-1}$$
    où m est un entier positif.

    Utiliser la dérivée d'une constante et la dérivée du produit de deux facteurs.
17. Rechercher la dérivée n^{e} de la fonction $\cos x$. Démontrer la formule.
18. Démontrer par récurrence la formule donnant la valeur acquise C_n par un capital C_o placé pendant n années lorsqu'il y a capitalisation annuelle des intérêts : $C_n = C_o(1+t)^n$ où t est le taux annuel.

Chapitre 3

Valeur absolue

3.1 Définition

La valeur absolue d'un nombre réel x est le nombre positif, noté $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

3.2 Propriétés immédiates

On peut aisément démontrer les propriétés suivantes :

1. La valeur absolue d'un nombre est nulle ssi ce nombre est nul.

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

2. Un réel et sa valeur absolue ont le même carré.

$$\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = |a|^2$$

3. Un réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue.

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \leq |a|$$

4. Deux réels opposés ont la même valeur absolue.

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a| = |-a|$$

5. La racine carrée du carré d'un réel est égal à la valeur absolue de ce réel.

$$\forall a \in \mathbb{R}, |a| = \sqrt{a^2}$$

3.3 Propriétés algébriques

Les valeurs absolues jouissent des propriétés suivantes (règles de calcul)

1. La valeur absolue du produit de deux réels est égale au produit des valeurs absolues des réels
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| = |a||b|.$$
2. La valeur absolue de la n^{eme} puissance d'un réel égale à la n^{eme} puissance de la valeur absolue de ce réel
$$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, |a^n| = |a|^n.$$
3. La valeur absolue de l'inverse d'un réel non nul est égale à l'inverse de la valeur absolue de ce réel
$$\forall a \in \mathbb{R}_0, \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}.$$
4. La valeur absolue du quotient produit de deux réels non nuls est égale au quotient des valeurs absolues des réels
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$
5. Inégalité de Minkowski.

   La valeur absolue de la somme de deux réels est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des réels
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|.$$
   L'égalité ne se produisant que si a et b sont de même signe.
6. La valeur absolue de la différence des valeurs absolues de deux réels est inférieure ou égale à la valeur absolue de la différence de ces réels
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

3.4 Egalités et inégalités

- Deux réels ont la même valeur absolue

  ssi ils sont égaux ou opposés

  ssi leurs carrés sont égaux
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

- Les carrés de deux réels vérifient une inégalité ssi les valeurs absolues de ces réels vérifient la même inégalité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

3.5 Exercices

1. Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français et en symboles mathématiques.
2. Que peut-on dire de l'équation $||x| - |x^2|| + 2 = 0$? Pourquoi ?
3. (a) Si x est un réel et n un naturel non nul, que peut-on dire du signe de x^{2n} ? de x^{2n+1} ?
   (b) En tenant compte de ces renseignements, que vaut $|x^{2n}|$? et $|x^{2n+1}|$?
4. Si r est un réel strictement négatif, que vaut $|r - 1|$?
5. Si $x \in [-3, 2]$, que vaut $|x + 3| + |x - 2|$?
6. Si x et y sont des réels, montrer que $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
   (suggestion : $2A = (A + B) + (A - B)$).
7. Répondre par vrai ou faux et justifier.
   (a) $|(-5)^2| = -25$.
   (b) $|5 - 7| = |5| - |7| = -2$.
   (c) $|(-7)(-5)| = | - 7|| - 5| = 35$.
   (d) Si $a > 0$ et $b < 0$, $|ab| = ab$.
   (e) Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $| - x| = x$.

Chapitre 4

Équations et Inéquations

4.1 Définitions

Une *équation* est une égalité qui n'est vraie que pour certaines valeurs de l'inconnue (généralement x).
Résoudre une équation, c'est trouver (toutes) les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité.
Une équation est dite de *degré* n lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme de degré n, càd peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

avec $a_n \neq 0$.

Une *inéquation* est une inégalité qui n'est vraie que pour certaines valeurs de l'inconnue (généralement x).
Résoudre une inéquation, c'est trouver (toutes) les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.
Une inéquation est dite de *degré* n lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme $P(x) > 0$ ou $P(x) \geq 0$ ou $P(x) < 0$ ou $P(x) \leq 0$ où $P(x)$ est un polynôme de degré n.

4.2 Principes d'équivalence pour les équations

Pour résoudre une équation, on la simplifie en équations équivalentes jusqu'à obtenir la solution.
Deux équations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. A chaque étape

de calcul, on note l'équivalence à l'aide du signe $\ll \Leftrightarrow \gg$ On utilise les *principes d'équivalence* suivants :

1. On obtient une équation équivalente (à une équation donnée) en ajoutant ou soustrayant une même quantité aux deux membres d'une équation
   Exemple :
   $$x+3=0 \Leftrightarrow x+3-3=0-3 \Leftrightarrow x=-3$$
   Ce principe d'équivalence est aussi parfois énoncé "Lorsqu'un terme change de membre, il change de signe"
2. On obtient une équation équivalente (à une équation donnée) en multipliant ou divisant les deux membres d'une équation par une même quantité non nulle
   Exemple :
   $$2x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$$
3. un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul (principe de disjonction).
   Exemple :
   $$2x(x+3)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \text{ ou } x+3=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-3$$

Remarques :

— Ces principes sont applicables à toutes les équations. Les deux premiers suffisent pour résoudre toutes les équations du premier degré.

— Il est faux d'écrire
$$2x(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{2x=0} \\ \text{x+3=0} \end{cases}$$
car l'accolade est un signe utilisé pour signifier "et" et pas "ou".

4.3 Equations du second degré

Si l'équation est du second degré ou peut se ramener à une telle équation, càd est équivalente à
$$ax^2+bx+c=0,$$
on peut aussi la résoudre à l'aide du réalisant (Δ ou ρ).
On calcule $\Delta = b^2-4ac$.

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle. On verra dans le chapitre des nombres complexes que cette équation admet alors deux solutions complexes.

4.4 Equations du n^{eme} degré

Pour les équations d'un degré supérieur ou égal à 2 ou pouvant se ramener à une équation de ce type, on cherche mettre l'équation sous la forme

$$P(x) = 0,$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré n, puis à factoriser le polynôme.
Pour factoriser, on utilise, par ordre de préférence, une des méthodes suivantes :

— la mise en évidence

— les produits remarquables à savoir

  * $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$
  * $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
  * $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
  * $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
  * $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

— les groupements

— la grille de Horner

Une fois le polynôme factorisé, on applique le principe de disjonction (ou du produit nul).

4.5 Principes d'équivalence pour les inéquations

Pour résoudre une inéquation, on la simplifie en inéquations équivalentes jusqu'à obtenir la solution.
Deux inéquations sont *équivalentes* si elles ont le même ensemble de solutions. A chaque

étape de calcul, on note l'équivalence à l'aide du signe ≪ ⇔ ≫. On utilise les *principes d'équivalence* suivants :

1. On obtient une inéquation équivalente (à une inéquation donnée) en ajoutant ou soustrayant une même quantité aux deux membres d'une inéquation
   Exemple :
   $$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x + 3 - 3 > 0 - 3 \Leftrightarrow x > -3$$
   Ce principe d'équivalence est aussi parfois énoncé "Lorsqu'un terme change de membre, il change de signe".
2. On obtient une inéquation équivalente (à une inéquation donnée) de même sens en multipliant ou divisant les deux membres d'une inéquation par une même quantité strictement positive
   Exemple :
   $$2x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$
3. On obtient une inéquation équivalente (à une inéquation donnée) de sens opposé en multipliant ou divisant les deux membres d'une inéquation par une même quantité strictement négative
   Exemple :
   $$-2x < 7 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{2}$$

Remarques :

— Ces principes sont applicables à toutes les équations. Les deux premiers suffisent pour résoudre toutes les équations du premier degré.

— Il est faux d'écrire
$$2x(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$
car un produit est positif si et seulement si le nombre de facteurs négatifs est pair.
Dans le cas-ci-dessus, le produit serait aussi strictement positif si les deux facteurs étaient négatifs.
La résolution d'une inéquation de degré supérieur à 1 se fait généralement en écrivant l'inéquation sous la forme $P(x) > 0$ puis en factorisant le polynôme en facteurs du 1er ou 2nd degré et en dressant un tableau de signes.

4.6 Inéquations du premier et du second degré

4.6.1 Signe d'une expression du premier degré

Une expression du type $a+b$ a toujours le signe du coefficient du terme du premier degré (a) à droite du zéro ($-\frac{b}{a}$) et le signe opposé à gauche. On rassemble ces renseignements dans le tableau suivant :

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	Signe opposé à a	0	Signe de a

4.6.2 Signe d'une expression du second degré

Une expression du type ax^2+bx+c a toujours le signe du coefficient du terme du second degré (a) sauf entre les éventuels zéros du trinôme.
Si $\Delta > 0$ et si les zéros du trinôme sont respectivement x_1 et x_2 supposés tels que $x_1 < x_2$, on rassemble ces renseignements dans le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a

4.7 Equations et inéquations fractionnaires

Une (in)équation fractionnaire est une (in)équation dans laquelle l'inconnue figure au dénominateur. Dans ce cas, des conditions d'existence doivent être annoncées pour exiger que chaque dénominateur contenant l'inconnue soit non nul.

Pour résoudre une équation fractionnaire, la méthode générale est de réduire tous les termes au même dénominateur, puis de chasser ce dénominateur commun : cela revient à multiplier les deux membres de l'équation par un même nombre non nul ou considérer qu'une fraction est nulle ssi son numérateur est nul.

Pour résoudre une inéquation fractionnaire, la méthode générale est de transférer tous les termes dans un membre puis de factoriser le membre non nul en produit et quotient de facteurs du 1er ou 2nd degré. On utilise alors un tableau de signes pour étudier le signe de ce membre.

Remarque :
Généralement, il est vivement déconseillé de chasser le dénominateur commun dans une

inéquation irrationnelle car on ne connaît (généralement) pas le signe de ce dénominateur.
Exemple :

$$x > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 > 1$$

est faux. Cela revient à multiplier les deux membres par x dont on ne connaît pas le signe.

4.8 Equations et inéquations irrationnelles

4.8.1 Principes d'équivalence

Une équation irrationnelle est une équation dans laquelle l'inconnue figure sous un radical.
Si l'indice de la racine est pair (généralement une racine carrée), des conditions d'existence doivent être annoncées (le radicand doit être positif).
Si l'indice de la racine est impair, les seules conditions d'existence sont celles des radicands.
Pour résoudre une inéquation irrationnelle, on utilise le principe d'équivalence suivant :

Si a et b sont strictement positifs, alors $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$.

4.8.2 Equation exemple

Exemple :
Soit l'équation

$$\sqrt{3x+1} = 1 - x.$$

La condition d'existence est

$$3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

- Si $1 - x < 0$ càd si $x > 1$, alors le premier membre est positif et le second négatif. L'équation est impossible.
- Si $1 - x \geq 0$ càd si $x \leq 1$, alors les deux membres sont positifs. L'équation est équivalente à $3x + 1 = (1 - x)^2 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\underbrace{x = 5}_{\text{à rejeter}}$

Remarques :
— Isoler autant que possible le terme contenant la racine carrée dans un membre avant l'élévation au carré. Si ce n'est pas possible (par exemple, deux termes contenant

chacun une racine carrée), une deuxième élévation des deux membres au carré est nécessaire.

— La condition $1 - x \geq 0$ est souvent improprement appelée "condition d'élévation au carré". Improprement car on a toujours $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$. Par contre $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ est faux si a et b ne sont pas de même signe.

4.8.3 Inéquation exemple

Ex : Soit l'inéquation

$$\sqrt{x+1} > x - 1.$$

La condition d'existence est

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Le 1er membre est alors toujours positif.

— Si $x - 1 < 0$, càd si $x < 1$, alors le premier membre est positif et le deuxième négatif.
L'inéquation est toujours vérifiée.
Un premier morceau de l'ensemble des solutions est $[-1, 1[$.

— Si $x - 1 \geq 0$, càd si $x \geq 1$, alors les deux membres sont de même signe.
L'inéquation est équivalente à

$$x + 1 > (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Un deuxième morceau de l'ensemble des solutions est $[1, 3]$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = [-1, 3]$.

Remarque :
Si le sens de l'inégalité avait été opposé à celui de l'exemple, aucune valeur de l'inconnue $x < 1$ n'aurait étré solution.

4.9 Equations et inéquations contenant des valeurs absolues

4.9.1 Principes d'équivalence

Au vu des propriétés des valeurs absolues (voir chapitre adéquat), on a les principes d'équivalence suivants :

- Si $a \geq 0$, on a
  - ⋆ $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
  - ⋆ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
  - ⋆ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$
- Si $a < 0$, on a
  - ⋆ $|x| = a$ est une équation impossible. $\mathrm{S} = \emptyset$
  - ⋆ $|x| \leq a$ est une équation impossible. $\mathrm{S} = \emptyset$
  - ⋆ $|x| \geq a$ est une équation toujours vérifiée. $\mathrm{S} = \mathbb{R}$ (s'il n'y a pas de CE).

Remarque : ces principes d'équivalences sont immédiats à comprendre si on a en tête le graphique de la fonction $|x|$.

4.10 Exercices

4.10.1 Inéquations

1. Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante
$$\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 \leq 1.$$
2. Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante
$$|2 - 2x| < |x^2 - 1|.$$
3. Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante
$$\frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 - 2x - 5} \leq 5.$$
4. Résoudre l'inéquation
$$\left(\frac{3 - 2x}{x - 1}\right)^2 \leq \left(\frac{6 - 5x}{x + 2}\right)^2.$$

5. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{1-x} < \frac{1}{|1+x|}.$$

6. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x^2-4x+3} \leq \frac{2}{x^2-4x+4}.$$

4.10.2 Inéquations irrationnelles

1. Résoudre l'inéquation
$$\frac{\sqrt{-x^3+3x+2}}{\sqrt{x^2-7x+10}} \leq \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-x}}.$$

2. Résoudre et discuter l'inéquation
$$\sqrt{\frac{x+m}{m^2}} \leq 1-\frac{\sqrt{x}}{m},$$
où m est un paramètre réel.

3. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} \leq x.$$

4. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Résoudre l'inéquation
$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}} \leq \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-4}.$$

6. Résoudre l'inéquation
$$\frac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \leq \frac{3}{8}.$$

7. Résoudre l'inéquation
$$\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{2-x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

8. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

9. Résoudre l'inéquation
$$\sqrt{\frac{6x-11}{3x-2}} \leq \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

10. Résoudre l'inéquation
$$\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

12. Résoudre l'inéquation
$$\frac{1}{x(x-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+9)}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Résoudre l'inéquation
$$\frac{3}{x-1} \leq \sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

14. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:
$$\frac{x-2}{x+2} \geq -2+\sqrt{-x}.$$

15. Résoudre l'inéquation
$$\frac{x+\sqrt{3x+10}}{x-\sqrt{3x+10}} \leq \frac{x+1}{x-1}.$$

16. Dans $\mathbb{R}$, résoudre l'inéquation :
$$\frac{1}{1+\sqrt{|x-1|}} < x.$$

17. Résoudre l'inéquation
$$1-\sqrt{\frac{3-x}{x}} \leq \frac{2}{x-1}.$$

4.10.3 Inéquations paramétriques

1. (09/10) Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{a,-a-1\}$ l'inéquation paramétrique
$$\frac{x}{x-a}+\frac{x+1}{x+a+1} \geq 0$$
où $a \in [0,+\infty]$

Chapitre 5

Discussion d'équations paramétriques du second degré

5.1 Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

5.1.1 Propriété

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.
Si $\Delta \geq 0$, l'équation admet deux solutions (peut-être confondues) notées x_1 et x_2. On a alors

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$$

et

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

.

5.1.2 Conséquences

Ces propriétés ne sont pas difficiles à démontrer.
Elles ont des conséquences énormes : lorsque $\Delta > 0$,

- si $\dfrac{c}{a} > 0$, alors x_1 et x_2 sont de même signe
- si $\dfrac{c}{a} < 0$, alors x_1 et x_2 sont de signes opposés

- si $\frac{c}{a} = 0$, alors x_1 ou x_2 est nulle.

De plus,

Remarque :

Certaines de ces combinaisons ne sont pas compatibles entre elles. Ainsi, par exemple,

- $\Delta > 0$ et $\frac{c}{a} < 0$,
- $\Delta > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ et $-\frac{b}{a} = 0$
- $\cdots$

Si on obtient de tels cas de figure, c'est qu'une erreur a été commise.

5.2 Discussion d'équation paramétrique du second degré

5.2.1 Théorie

Une équation paramétrique est une équation dont les coefficients n'ont pas une valeur numérique fixée. Ils dépendent d'une (ou plusieurs) grandeur, appelée(s) paramètre(s) (souvent notée m).

Discuter une équation paramétrique, c'est faire l'étude quantitative et qualitative des solutions càd pouvoir déterminer le nombre de solutions de l'équations ainsi que leurs propriétés. Dans le cas d'une équation du second degré, cette discussion se fait très aisément en étudiant 3 grandeurs : Δ, $\frac{c}{a}$ et $-\frac{b}{a}$. et en utilisant les propriétés ci-dessus.

5.2.2 Exemple

Discussion d'équation du second degré

Discuter l'équation

$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

Pour quelles valeurs du paramètre a réel a-t-on

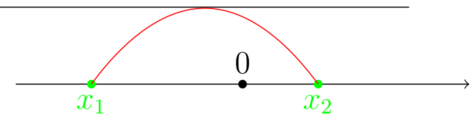
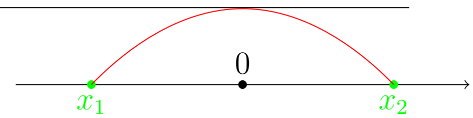
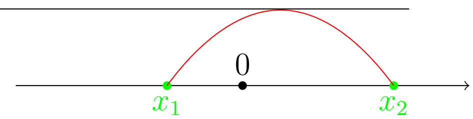
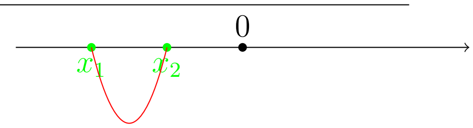
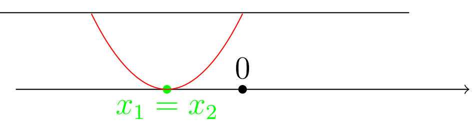
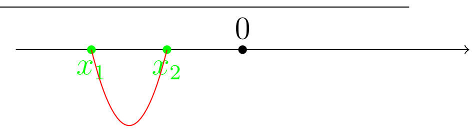
$$ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0, \forall x \geq 0\,?$$

Réponse

$\Delta = (a+1)^2 - 4a(-1) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$. Donc $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

$\frac{c}{a} = \frac{1}{a}$. Donc $\frac{c}{a} \neq 0$ et admet $a = 0$ comme pôle.

$-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{a+1}{a}$. Donc $-\dfrac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow a = -1$ et admet $a = 0$ comme pôle.

a	Δ	$\dfrac{c}{a}$	$-\dfrac{b}{a}$	Conclusions	Représentation
	+	-	-	2 zéros de signes distincts, le négatif a la plus grande valeur absolue	
-1	+	-	0	2 zéros opposés	
	+	-	+	deux zéros de signes contraires, le positif a la plus grande valeurs absolue	
0	+	$\nexists$	$\nexists$	le trinôme devient $x+1$. Si $x \geq 0$, on a $x+1 \geq 0$. La valeur $m = 0$ convient.	
	+	+	-	2 zéros distincts négatifs	
1	0	+	-	1 zéro double négatif	
	+	+	-	2 zéros distincts négatifs	

Les valeurs de a qui conviennent sont donc $[0, +\infty[$.

Remarques

1. la dernière colonne de ce tableau (représentation) n'est pas obligatoire. Elle permet simplement de visualiser la fonction du second degré et donc de mieux répondre aux questions relatives au signe du trinôme

2. Le nom du paramètre a peut prêter à confusion avec le nom habituellement donné au

coefficient de x^2 dans le trinôme $ax^2 + bx + c$. Il se fait que, dans cet exemple, il sont identiques. mais il s'agit évidemment d'un cas particulier.

5.3 Position d'un nombre α par rapport aux solutions d'une équation du 2nd degré

5.3.1 Théorie

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dont le $\Delta > 0$ et x_1, x_2 les solutions telles que $x_1 < x_2$. Désignons par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et α un nombre réel.
On a

α		x_1		x_2	
$f(\alpha)$	Signe de a	0	Signe opposé à a	0	Signe de a
a	Signe de a	Signe de a	Signe de a	Signe de a	Signe de a
$a \cdot f(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion :

- si $a \cdot f(\alpha) < 0$, alors $\alpha \in]x_1, x_2[$
- si $a \cdot f(\alpha) > 0$, alors $\alpha \in]-\infty, x_1[$ ou $\alpha \in]x_2, +\infty[$

5.3.2 Exemple

Pour quelles valeurs du paramètre a réel a-t-on

$$ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0, \forall x \in [0,1]\,?$$

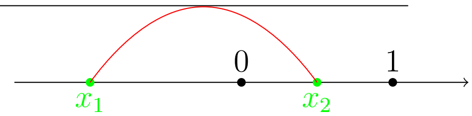
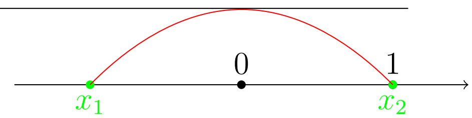
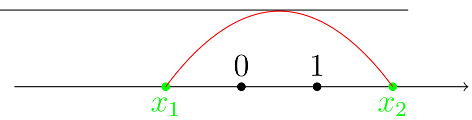
Si le trinôme est positif $\forall x \geq 0$, il est certainement positif sur [0,1]. Toutes les valeurs de m satisfaisant au premier point satisfont donc aussi à cette nouvelle condition.
Il est possible que d'autres valeurs de m vérifient cette condition. Pour cela, on doit déterminer la position de 1 par rapport aux racines du trinôme. On a

$$a \cdot f(1) = a \cdot (a + (a+1) + 1) = 2a \cdot (a+1).$$

Or $a \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 0$.
Le nombre 1 est donc compris entre les zéros du trinôme ssi $-1 < a < 0$.

Si $a = -1$, un des zéros est égal à 1.

Si $a = 0$, le trinôme devient une fonction du 1er degré qui s'annule en $x = 1$.

a	Δ	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$a \cdot f(1)$	Conclusions	Représentation
	+	-	-	+	2 zéros de signes distincts, le négatif a la plus grande valeur absolue ; 1 est extérieur aux zéros	
-1	+	-	0	0	2 zéros opposés, 1 est un des zéros	
	+	-	+	-	deux zéros de signes contraires, le positif a la plus grande valeurs absolue, 1 est compris entre les zéros.	

Les valeurs de m qui conviennent sont donc $[-1, +\infty[$.

5.4 Exercices

1. Déterminer les valeurs réelles de m pour lesquelles le trinôme $x^2 + mx - m$ n'a pas de racine strictement négative.

2. Déterminer tous les α réels pour lesquels

$$\alpha x^2 + \alpha x + 1 \geq 0, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

3. Déterminer tous les α réels pour lesquels

$$\alpha x^2 - x + \alpha \geq 0, \ \forall\, x > 0.$$

4. Donner, pour chaque valeur de $m \in \mathbb{R}$, le nombre de racines du trinôme

$$x^2 + 2m\,x + 7m - 10$$

strictement supérieures à 1. *Suggestion* : il peut être utile de poser $x = y + 1$.

5. Donner le nombre de solutions strictement positives de l'équation

$$(m^2 - 1)x^2 + 2mx - \sqrt{2}\ \ m = 0$$

où m est un paramètre réel.

6. Pour quelles valeurs réelles de m le trinôme $x^2 + mx + m$ est-il strictement positif dans l'intervalle $[0, 1]$? *Suggestion* : discuter la position de 0 et de 1 par rapport aux racines du trinôme, quand il y en a.

7. Déterminer le nombre de racines réelles *distinctes* de

$$x^4 - mx^2 + m$$

$(m \in \mathbb{R})$.

8. Déterminer les valeurs réelles de m pour lesquelles le trinôme

$$mx^2 + mx + (1 + m)$$

possède deux racines réelles de même signe.

9. Pour quelles valeurs rélles de m le trinôme

$$mx^2 + 2mx + 1$$

possède-t-il deux racines distinctes dans l'intervalle $]-2, 0[$?

10. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé :

"Pour tout réel x tel que $|x| < 1/2$, on a $ax^2 + (a+1)x + 1 \geq 0$."

est vrai.

11. Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$0 \leq x \leq 1 \text{ alors } ax^2 + (a+1)x - 1 \leq 0\ ?$$

12. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de m pour lesquelles l'énoncé

$$\text{“Pour tout réel } x\text{, on a } mx^2 - (m+1)^2 x + 2(m+1) \leq 0.\text{”}$$

est vrai.

13. Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles l'inéquation suivante est vérifiée pour tout x réel

$$\left| \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3.$$

Chapitre 6

SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

6.1 Suites numériques

6.1.1 Définition

Une *suite numérique* (u_n) est une liste ordonnée de réels.
Les éléments de la liste sont appelés *termes* et sont numérotés à partir de 1 ou 0 ; ils sont notés $(u_o,)$ u_1, u_2,..., u_n,...
u_n est appelé *terme général* de la suite.

6.1.2 Détermination

- Une suite peut être déterminée par son terme général, c'est à dire par une relation qui unit la valeur de chaque terme u_n à son numéro n.
- Une suite peut aussi être déterminée par le premier terme de la suite et par une relation qui lie un terme et son prédécesseur. On dit que la suite est définie par *récurrence*.

Exemple : Considérons la suite $1, 3, 5, \ldots$ On a $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $\ldots$
Le terme général est $u_n = 2n - 1$.
La formule de récurrence est : $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + 2$.

6.2 Suites arithmétiques

6.2.1 Définitions

Une *suite arithmétique* est une suite numérique telle que

- chaque terme (à partir du deuxième) est égal au précédent augmenté du même nombre r qui est appelé *raison* :

  $$u_n = u_{n-1} + r, \text{ pour tout entier } n > 1 \text{ (ou 2).}$$

  ou encore

- la différence entre deux termes consécutifs est une constante r qui est appelée *raison* :

  $$u_n - u_{n-1} = r, \text{ pour tout entier } n > 1 \text{ (ou 2).}$$

  Les deux formulations étant équivalentes.

6.2.2 Propriétés

- Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r est donné par :

  $$u_n = u_1 + (n-1)r, n > 1.$$

- La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est

  $$S_n = u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = n\frac{u_1 + u_n}{2}, n \geq 1.$$

- Une suite est arithmétique ssi chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

6.3 Suites géométriques

6.3.1 Définition

Une *suite géométrique* est une suite numérique telle que

- chaque terme est égal au précédent multiplié par le même nombre q appelé raison :

  $$u_n = u_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \text{ (ou 2) .}$$

  Ou encore

- le quotient de deux termes consécutifs est une constante q qui est appelée *raison*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = q, \forall n > 1.$$

Les deux formulations étant équivalentes si aucun terme de la suite n'est nul.

6.3.2 Propriétés

- Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_1 de raison q est donné par $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ ou $u_n = u_0 \cdot q^n$,$\forall n \geq 1$.
- La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

- Une suite positive est géométrique ssi chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

6.4 Exercices

1. Calculer la somme des n premiers naturels non nuls.
2. Un ouvrier est embauché avec un salaire mensuel initial de 900 €(s_1). Chaque mois, son salaire est augmenté de 22,50 €. Caractériser la suite composée des salaires successifs. Calculer le salaire qu'il touchera le 30e mois ainsi que la somme totale perçue depuis son embauche.
3. En 1972, la population d'un pays était de 52,3 millions d'habitants. En 1991, elle n'est plus que de 48,5 millions. Si on suppose que la population se comporte comme une suite arithmétique, déterminer la diminution de population sur une année.
4. Sur le plat de fromage, il reste un demi camembert. Chaque fois que Pierre se sert, il prend la moitié de ce qui reste. A la 8e fois quelle portion se sert-il ? Que reste-t-il sur le plat ? Quelle portion total du camembert a-t-il mangée ?
5. Un capital de 5000 € est placé à du 8%. Calculer les sommes obtenues après 1, 2, 3,..., n années dans le cas où le placement est à intérêts simples et dans le cas où il y a capitalisation des intérêts. Caractériser les deux suites obtenues.

6. On raconte que l'inventeur de l'échiquier demanda, comme humble récompense, un grain de blé sur la 1ère case, deux sur la 2ème, quatre sur la 3ème et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre de grains jusqu'à la 64ème case de l'échiquier. Quel est le nombre de grains de blé correspondant à la 64ème case ? Calculer le nombre total de grains à donner à l'inventeur.

   Un grain de blé pèse 0,05g. La production mondiale de blé en 1995 est de 600 millions de tonnes. Cette production suffit-elle à payer l'inventeur ?

7. Monsieur Minver achète un ficus de 1 m de haut (hors pot). Chaque année son ficus grandit de 8%. Estimer le nombre d'années au bout desquelles il atteindra le plafond à 2,5 m du sol sachant que le pot a 25 cm de haut.

8. Une bande de voleurs ont tous un grade différent. Comme une nuit, ils ont volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclare : " Le moins gradé en prend un. Celui qui a le grade supérieur : 2 ; le suivant : 3 et ainsi de suite ". Mais les voleurs se révoltent contre l'injustice. " Nous en prendrons 5 chacun ", déclare le plus audacieux. Mais combien y a-t-il de voleurs ?

9. Une subvention de 76 800 € est débloquée pour rechercher une nappe souterraine dans le désert. Le coût du forage est ainsi fixé : le 1er mètre à 100 €, le mètre suivant à 140 €, $\cdots$; le coût augmentant de 40 € à chaque mètre creusé. Trouver la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le budget fixé.

10. En photographie, le diaphragme règle la dimension du trou d'entrée de la lumière dans l'objectif. Voici une suite d'indications relatives au diaphragme reprise sur la bague de l'appareil : ...2 ; 2.8 ; 4 ; 5.6 ; 8 ; 11 ; 16 ;... Caractériser la suite et la compléter en trouvant le 1er et le dernier terme.

11. A partir d'un carré de 10 cm de côté, on construit le carré dont les sommets sont les milieux des côtés du carré donné et ainsi de suite. Pour les 6 premiers carrés, calculer la longueur des côtés, le périmètre, l'aire. Calculer la somme des périmètres et la somme des aires.

12. Une suite arithmétique est telle que la somme des 100 premiers termes est égale à 20800 et la somme de ses 60 premiers termes est égale à 7680. Calculer le 50^{eme} terme de cette suite.

13. Déterminer une suite arithmétique dont la somme des 10 premiers termes est égale à 355 et dont le 3^{eme} terme est égal à 18
14. Une suite arithmétique est telle que son premier terme est strictement positif et égal à sa raison. Quel est le rang du terme égal à 100 fois le premier terme ?
15. La somme de 12 nombres impairs consécutifs vaut 264. Quels sont ces nombres ?
16. Déterminer le réel x pour que les trois réels $2x-1$, $x+2$ et $1-3x$ soient trois nombres consécutifs d'une suite arithmétique.
17. Un pèlerin part de Bruxelles et se rend à Saint Jacques de Compostelle au Nord de l'Espagne. En seize jours, il a parcouru 384 km. Chaque jour, il parcourt 2 km de plus que la veille.
    (a) Calculer le nombre de km parcourus après 24 jours.
    (b) Sachant que la distance totale est d'environ 1848 km, calculer le nombre de jours nécessaires pour accomplir le trajet
    (c) Quel est le nombre de km parcourus le jour précédent l'arrivée ?
18. Déterminer le 6^{eme} terme d'une suite géométrique croissante dont le 3eme terme est égal à 80 et le 5eme vaut 1280.
19. La somme des trois premiers termes d'une suite géométrique est égale à 52. Déterminer cette suite sachant que le 3eme terme est égal à 9 fois le premier.
20. Déterminer le réel y pour que les trois réels 3, $y-1$ et $2y-1$ soient trois nombres consécutifs d'une suite géométrique
21. (u_n) est un suite géométrique de raison 3 telle que $u_n = 486$ et $S_n = 728$. Déterminer u_1 et n.

6.5 Convergence d'une suite

6.5.1 Définitions

Convergence vers un réel u

La suite (u_n) *converge vers le nombre réel* u si, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un naturel M tel que $u-\varepsilon < u_n < u+\varepsilon$ ou encore $|u_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq M$.

Le nombre u est appelé *limite* de la suite (u_n). On note $u_n \Rightarrow u$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$.

Convergence vers l'infini

La suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ si, quelque soit $N > 0$, il existe un naturel M tel que $u_n > N$ pour tout $n \geq M$. On note $u_n \Rightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarques :

- La limite d'une suite est unique.
- Toutes les suites n'ont pas de limite.

  Exemple : La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

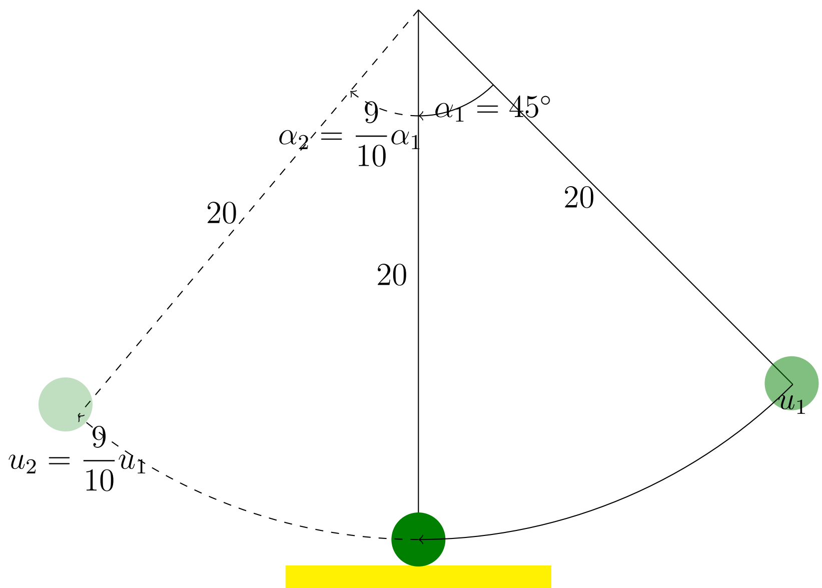
6.5.2 Limite d'une suite géométrique

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors (u_n) converge vers $\begin{cases} 0 \text{ si } |q| < 1 \\ u_1 \text{ si } q = 1 \\ +\infty \text{ si } q > 1 \text{ et } u_1 > 0 \\ -\infty \text{ si } q > 1 \text{ et } u_1 < 0 \end{cases}$
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors (S_n) converge vers $u_1\dfrac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.

6.5.3 Exercices

1. Exprimer $0,99999999\ldots$ sous une autre forme en tenant compte qu'il peut s'exprimer sous la forme $0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots$
2. Avec une ficelle de 100 cm, on veut tracer une figure géométrique "grecque" en utilisant la méthode suivante : on trace un segment de 50 cm, puis on répète la manoeuvre "effectuer une rotation de 90°, tracer un segment d'une longueur égale à la moitié du précédent".
   (a) Dispose-t-on d'assez de ficelle pour poursuivre la construction indéfiniment ?
   (b) Combien de côtés contient la figure que l'on peut tracer avec une ficelle de 99 cm ?
3. Un pendule d'une longueur de 20 cm oscille en laissant à chaque passage par le point le plus bas une trace dans le sable. A cause de frottements, le pendule remonte à partir

de la position la plus basse le long d'un arc de cercle dont la longueur diminue de 5% par rapport à l'arc de cercle précédent. Sachant qu'on lâche le pendule depuis une position faisant un angle de 45° avec la verticale,



(a) Quelle est la longueur u_1 de l'arc de cercle joignant la position de lâcher au point le plus bas ?

(b) Quelle est la longueur u_2 de l'arc de cercle joignant la position la plus basse au sommet suivant de la trajectoire ?

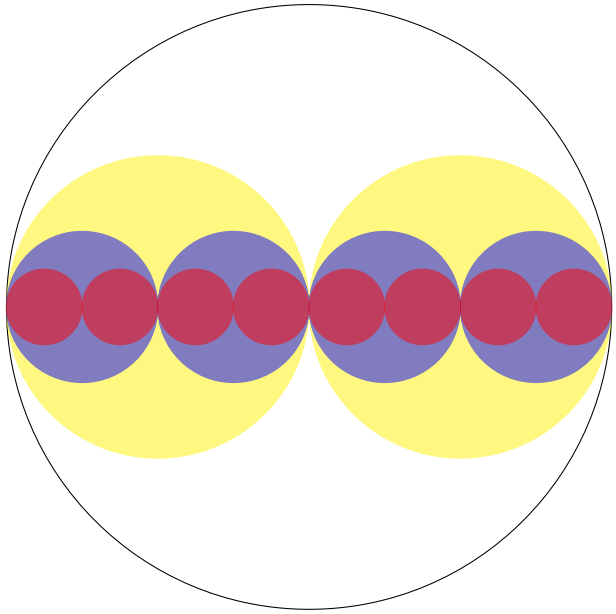
(c) Quelle est l'expression de la longueur du nème arc de cercle joignant la position la plus basse au sommet suivant de la trajectoire ?

(d) Quelle est la longueur totale parcourue par l'extrémité du pendule après 10 oscillations ?

(e) Quelle est la limite de la longueur totale si on laisse le pendule osciller indéfiniment ?

4. Dans un grand cercle de rayon 8 cm, on trace successivement
   - — deux cercles de rayons 4 cm,
   - — 4 cercles de rayon 2 cm,
   - — etc

   en multipliant chaque fois le nombre de cercles par deux et en divisant les rayons par 2. Les cercles de même taille étant coloriés dans le même couleur.



(a) caractériser la suite (r_n) des rayons des cercles. Donner le terme général r_n de cette suite.

(b) caractériser la suite (a_n) des aires des cercles de rayon r_n. Donner le terme général de cette suite.

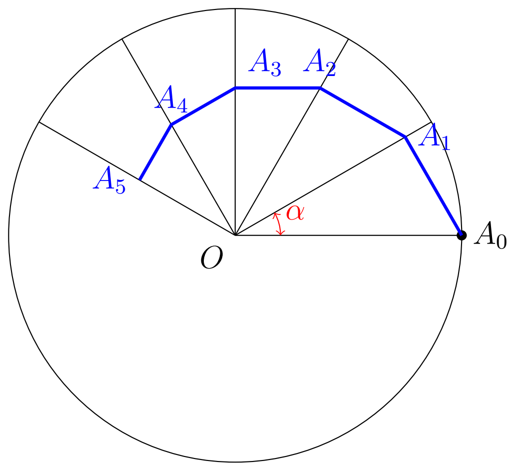
(c) On construit la suite (u_n) contenant la somme des surfaces de tous les cercles de même rayon (même couleur) :

$$u_n = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} a(i).$$

Caractériser la suite (u_n).

(d) Quelle est la surface totale de tous les cercles de toutes tailles ?

5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r. On trace n rayons successifs distants chacun d'un angle $\alpha (0 < \alpha < 90°)$. Soit A_0 le point d'intersection du premier rayon avec $\mathcal{C}$. On construit
   - le segment $[A_0A_1]$ perpendiculaire au deuxième rayon passant par A_0,
   - puis le segment $[A_1A_2]$ perpendiculaire au deuxième rayon passant par A_1,
   - et ainsi de suite.



Si $\mathcal{L}_n$ désigne la somme des longueurs des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, …, $[A_{n-1}A_n]$, on demande

(a) de donner l'expression de $\mathcal{L}_n$ en fonction de r et n

(b) de prouver que $\mathcal{L}_{+\infty} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{L}_n = r\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(c) Dans le cas où $\alpha = 30°$, montrer que $\mathcal{L}_{+\infty}$ est la somme du diamètre du $\mathcal{C}$ et du côté du triangle équilatéral inscrit dans $\mathcal{C}$.

Chapitre 7

Analyse combinatoire

7.1 Définitions

-]Si $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de n est le nombre noté $n!$ tel que

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

- Si $n, p \in \mathbb{N}$, le nombre de combinaisons sans répétition de n éléments distincts pris p à p est le nombre noté C_n^p tel que

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

- Si $n, p \in \mathbb{N}$, le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments distincts pris p à p est le nombre noté A_n^p tel que

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

7.2 Propriétés des combinaisons

- $\forall n \in \mathbb{N}, C_n^0 = C_n^n = 1,$
- $\forall n \in \mathbb{N}, C_n^1 = C_n^{n-1} = n,$

7.3 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un tableau à deux entrées dont la cellule située à la n $^{\text{ème}}$ ligne et $p^{\text{ème}}$ colonne contient le nombre C_n^p.

	0	1	2	3	4	5
0	1					$\cdots$
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
$\vdots$						

- les lignes du triangle de Pascal sont symétriques : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $n > p$,

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

- $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $n > p$,

$$C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$$

- la somme des éléments de la n ème ligne du triangle de Pascal est égale à 2^n

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

7.4 Binôme de Newton

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot a^{n-i} \cdot b^i$$

Remarque :

En particulier, on a

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot x^i$$

En dérivant cette égalité membre à membre, on obtient

$$n \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot i \cdot x^{i-1}$$

En remplaçant x par 1 dans chacune des 2 égalités précedentes, on obtient

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i$$

et

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i \cdot C_n^i$$

7.5 Exercices

1. Prouver que

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + C_n^n = 0.$$

En déduire que

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1},$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}.$$

2. Montrer que

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 \ldots = \sqrt{2^n} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 \ldots = \sqrt{2^n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

3. Des deux derniers points, calculer les sommes suivantes

$$S_1 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots,$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots,$$

$$S_3 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots,$$

$$S_4 = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots.$$

4. Démontrer la relation

$$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p.$$

En déduire que

$$C_n^p + C_{n+1}^{p+1} + \cdots + C_{n+q}^{p+q} = C_{n+q+1}^{p+q} - C_n^{p-1},$$

si $1 \leq p \leq n, \;\; q \geq 0$.

Que devient le second membre de cette dernière relation lorsque p est nul ?

5. (a) Démontrer la relation

$$k\, C_n^k = n\, C_{n-1}^{k-1} \quad \text{si} \quad n \geq k \geq 1.$$

(b) En déduire la valeur de la somme

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + n\, C_n^n.$$

6. (a) Démontrer l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + kC_n^k + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$C_n^2 + \cdots + (k-1)C_n^k + \cdots + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1\,.$$

   Rappel : une somme de m termes est nulle quand $m = 0$.

7. Calculer la valeur de

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots.$$

   Vérifier le résultat obtenu quand $n = 9$.

   Suggestion : donner l'expression algébrique et trigonométrique de $(1+i)^n$.

8. (a) Simplifier l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k}.$$

   (b) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^j \quad (0 \le j \le n).$$

   (c) Vérifier le résultat pour $n = 3$ et $j = 2$ et 3.

9. Démontrer que, pour tout entier naturel m, on a

$$C_{2m+1}^{\,m} \;=\; C_{2m}^{\,m} + C_{2m-1}^{\,m-1} + \cdots + C_m^0\,.$$

10. En évaluant de deux manières différentes une puissance de $(1+i)$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2m} C_{4m}^{2k} (-1)^{m+k} \;=\; 4^m\,.$$

    En déduire que

$$2\left(1 - C_{40}^2 + C_{40}^4 - C_{40}^6 + \cdots - C_{40}^{18}\right) \;=\; 2^{20} - C_{40}^{20}\,.$$

11. Montrer que, pour $n \ge 1$, on a

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2.$$

    Suggestion : identifier le coefficient d'une puissance de x bien choisie dans le polynôme $(x+1)^{2n}$ et dans le polynôme $(x+1)^n(x+1)^n$.

12. Calculer les sommes suivantes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2 \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k \left(C_n^k\right)^2.$$

Suggestion : pour S_n, introduire les polynômes $P(x) = (x+1)^n$, $Q(x) = (x-1)^n$ et chercher le coefficient d'une puissance de x bien choisie du produit PQ de deux façons différentes ; pour T_n, considérer le polynôme $P(x)$ et sa dérivée $P'(x)$.

13. Montrer que pour $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=0}^{k} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

et

$$\sum_{k=0}^{k} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0.$$

14. Calculer, pour tout naturel n,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} \quad \text{et} \quad J_n = \sum_{k=0}^{n-1} k C_{2n}^{2k+1}.$$

Suggestion : calculer $I_n + J_n$ et $I_n - J_n$.

15. Démontrer que, pour tout naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on a

$$(k+1) C_{n+1}^{k+1} = (n+1) C_n^k.$$

En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \, C_n^k.$$

16. Soit k un naturel tel que $2 \leq k \leq n+1$. Montrer que

$$l(k-1) C_{n+1}^k = n(n-1) C_{n-1}^{k-2}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k-1) \, C_{n+1}^k.$$

]

17. Calculer, pour tout naturel $n > 0$, la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ \frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}.$$

18. (07/11) Démontrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^2 = C_{n+1}^3, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Chapitre 8

Nombres complexes

8.1 Définitions

Il y a plusieurs méthodes différentes pour introduire les nombres complexes. Dans cette synthèse, nous accepterons la définition brutale suivante :
si a et b sont deux nombres réels, on appelle nombre complexe z un nombre de la forme $z = a + ib$ où i est tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Pour des raisons dépendant de l'introduction, on appelle

- partie réelle de z le nombre a. On la note $\Re z$
- partie imaginaire de z le nombre b. On la note $\Im z$

Si $b = 0$, le nombre complexe est un réel ; si $a = 0$, on dit que le nombre complexe est un imaginaire pur.

Dans la suite de ce chapitre, a et b désignent toujours des nombres réels.

Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont égaux ssi leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$$

8.2 Opérations

8.2.1 Somme de deux nombres complexes

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ sont deux nombres complexes, leur somme est le nombre complexe z défini par

$$z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

L'ensemble $\mathbb{C}$, muni de l'addition est un groupe commutatif ; ce qui veut dire (entre autres)

— existence d'un neutre (0),

— existence d'un opposé $(-z)$ pour chaque complexe (et donc de la différence de deux nombres complexes)

8.2.2 Produit de deux nombres complexes

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ sont deux nombres complexes, leur produit est le nombre complexe z défini par

$$z = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) - i(a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2).$$

L'ensemble $\mathbb{C}_0$, muni de la multiplication est un groupe commutatif, ce qui veut dire (entre autres)

— existence d'un neutre (le réel 1),

— existence d'un inverse noté $\frac{1}{z}$ pour chaque complexe non nul (et donc du quotient de deux nombres complexes)

8.2.3 Conjugué d'un nombre complexe

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on appelle conjugué du nombre complexe z le nombre noté $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z + \bar{z} = 2a (= 2\Re z)$

- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Remarque :

Dès qu'une propriété est vraie pour le produit de deux nombres, elle est vraie pour l'inverse d'un nombre non nul, le quotient de deux nombres, la n^e puissance d'un nombre,...

8.3 Module d'un nombre complexe

Si $z = a+ib$ est un nombre complexe, on appelle module du nombre complexe z le nombre positif noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\cdots$

Remarque :

Dès qu'une propriété est vraie pour le produit de deux nombres, elle est vraie pour l'inverse d'un nombre non nul, le quotient de deux nombres, la n^e puissance d'un nombre,$\cdots$

Attention : le module d'une somme n'est pas la somme des modules. On a l'inégalité de Minkowski :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

8.4 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carré d'un nombre complexe $z = a + ib$ tout nombre complexe $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x + iy)^2 = a + ib.$$

On a

$$(x + iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right.$$

Il suffit de résoudre ce système d'inconnues x et y. On trouve toujours deux solutions opposées. Un nombre complexe admet donc toujours deux racines carrées complexes opposées.

Cas particuliers :

- un nombre réel positif étant un nombre complexe particulier, on en déduit que, dans $\mathbb{C}$, un nombre positif admet deux racines carrées réelles opposées (ex : les racines carrées complexes de 5 sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$).
- un nombre réel négatif étant un nombre complexe particulier, on en déduit que dans $\mathbb{C}$ un nombre négatif admet deux racines carrées imaginaires pures opposées (ex : les carrées complexes de $-5 = 5i^2$ sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$).

Conséquences :

- une équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ admet toujours deux solutions complexes. En effet,
  si $\Delta \geq 0$, les solutions sont réelles ;
  si $\Delta < 0$, les solutions de l'équation sont

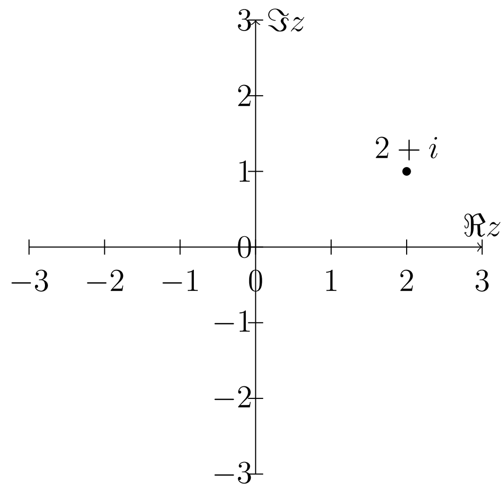
$$z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

  qui sont conjuguées.

- une équation du second degré à coefficients complexes ademet toujours deux solutions complexes.

8.5 Plan de Gauss

De même qu'on représente un nombre réel sur la droite des réels, on peut représenter un nombre complexe dans un plan (appelé plan de Gauss ou plan complexe).
Pour cela, on muni le plan d'un reprère orthonormé dont l'axe des abscisses est l'axe des réels et l'axe des ordonnées l'axe des imaginaires.
On représente alors le nombre $z = a + ib$ par le point de coordonnées (a, b).

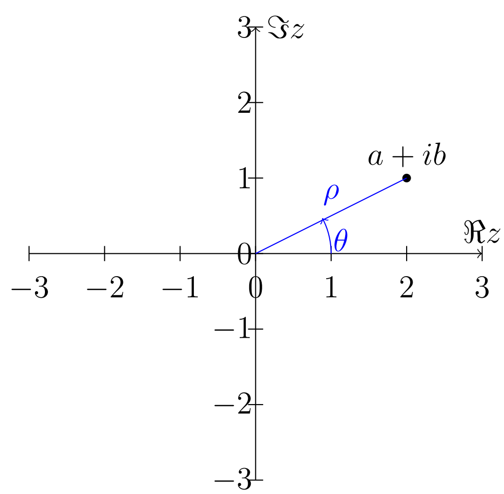


A chaque point du plan correspond un nombre complexe et réciproquement.

8.6 Argument d'un nombre complexe

Cette représentation d'un nombre complexe ouvre une nouvelle possibilité de décrire un nombre complexe. En effet, pour localiser un point dans le plan (et donc définir le nombre complexe qui lui correspond), on peut utiliser deux autres grandeurs.
Si $z = a + ib$ est le nombre complexe représenté par le point $Z(a, b)$, alors on peut localiser Z par

- — la distance ρ séparant le point de l'origine O des axes
- — l'angle orienté θ formé par la demi-droite $[OZ$ avec l'axe des réels.



Remarques :

— le nombre ρ est toujours positif ; le seul cas où il est nul c'est lorsque le nombre complexe représenté est nul.

— une application simple du théorème de Pythagore permet de démontrer que

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Autrement dit, ρ est le module du nombre complexe z

— il y a une infinité d'angles θ qui conviennent, égaux à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). Par convention, on considère que seul l'angle compris dans $]-\pi, \pi]$ est le bon angle. Cet angle θ est appelé l'argument du nombre complexe z.

— Grâce aux relations dans un triangle rectangle, on démontre facilement que

$$\tan\theta = \frac{b}{a}.$$

— Ces relations peuvent être utilement complétées par

$$a = \rho\cos\theta$$

et

$$b = \rho\sin\theta.$$

8.7 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

A partir de ces deux dernières relations, on constate que tout nombre complexe $z = a + ib$ peut s'écrire sous la forme

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Cette dernière expression est appelée forme trigonométrique du nombre complexe.
Deux nombres complexes $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ sont égaux ssi ils ont les mêmes modules et mêmes arguments :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

8.7.1 Propriétés

Cette forme trigonométrique a pour avantages de jouïr des propriétés suivantes (faciles à démontrer).
Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

- $zz' = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$
- $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

Remarque :

la relation

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

est appelée formule de Moivre.

8.7.2 Notation exponentielle

L'expression $\cos\theta + i\sin\theta$ est parfois notée $cis\theta$. Mais cette notation désuette est de moins en moins souvent utilisée au profit d'une autre ; elle est généralement notée

$$e^{i\theta}$$

où e est le même e que la base de l'exponentielle réelle. Il s'agit donc de généraliser la notion d'exponentielle à des nombres complexes. Cette généralisation est justifiable par les nombreuses propriétés communes aux expressions $\cos\theta + i\sin\theta$ et $e^{i\theta}$.

Ainsi, si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ les propriétés ci-dessus s'écrivent

- $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$
- $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Remarque :

On ne peut passer sous silence la merveilleuse formule d'Euler

$$e^{i\pi} = -1.$$

8.8 Racines n^{e} d'un nombre complexe

On appelle racine n^{eme} d'un nombre complexe $z' = \rho' e^{i\theta'}$ tout nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ tel que

$$z^n = z'.$$

On a donc

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = \rho' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho'} \\ \theta = \dfrac{\theta' + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Le nombre complexe z' admet donc les n racines n^{eme} suivantes :

- $z_0 = \sqrt[n]{\rho'} e^{i\dfrac{\theta'}{n}}$
- $z_1 = \sqrt[n]{\rho'} e^{i\dfrac{\theta' + 2\pi}{n}}$
- $z_2 = \sqrt[n]{\rho'} e^{i\dfrac{\theta' + 4\pi}{n}}$
- $\vdots$
- $z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho'} e^{i\dfrac{\theta' + 2(n-1)\pi}{n}}$

On constate que

— les racines n^{eme} d'un nombre complexe quelconque ont toutes le même module. Géométriquement, leurs points images appartiennent tous au même cercle centré à l'origine.

— les arguments des racines n^{eme} d'un nombre complexe quelconque forment une suite arithmétique de raison $\dfrac{2\pi}{n}$. Géométriquement, le polygone formé par les n points images est donc régulier.

— les racines n^{eme} d'un nombre complexe quelconque forment une suite géométrique de premier terme z_0 et de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

8.9 Racines n^e de l'unité

Les racines n^{eme} de 1 vérifient les propriétés suivantes :

- elles sont égales à 1, ω, ω^2, $\cdots$, ω^{n-1} où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
- la somme des racines n^{eme} de 1 est égale à 0
- le produit des racines n^{eme} de 1 est égale à $(-1)^{n-1}$.

Ces propriétés s'énoncent en français sans problème et ont des interprétations géométriques :

— les points images des racines n^{eme} de 1 sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine, dont un des sommets est le point (1,0).

— le centre de gravité des n sommets est l'origine des axes

Remarque

les racines n^{eme} d'un nombre complexe z quelconque peuvent être obtenues en multipliant une des racines n^{eme} de z (par exemple z_0) par chacune des racines n^{eme} de 1.

8.10 Exercices

8.10.1 Equations, racines

1. Résoudre et discuter l'équation
$$\frac{z}{\overline{z}} = \alpha,$$
(α complexe). Représenter l'ensemble des solutions dans le plan des nombres complexes.

2. Représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \ z + |z| \ \right| = |z| \right\}.$$

3. Montrer que $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est de module 1 si et seulement si z est réel.

4. Résoudre l'équation
$$\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^6 \\ 1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
Représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.

5. Calculer la somme des k^e puissances des racines 5^e de l'unité (k entier > 0).

6. Résoudre l'équation
$$z^3 = -|z|$$
($z \in \mathbb{C}$).

7. Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$
$$z^3 = |z|^2 + i\sqrt{2}\,|z|.$$
Suggestion : rechercher $|z|$ en égalant les modules des deux membres. En déduire la forme trigonométrique des solutions. Pour en obtenir la forme algébrique, noter que
$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

8. (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que $\cos 5\vartheta$ peut se mettre sous la forme

$$\cos 5\vartheta = \cos\vartheta \; P_4(\cos\vartheta)$$

   où $P_4(x)$ est un polynôme de degré 4 en x.

   (b) Calculer les racines de $P_4(x)$.

   (c) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{10}$.

9. Soient a et b deux nombres réels vérifiant l'inégalité

$$|b| < 2|a|.$$

   (a) Montrer que l'équation

$$az^2 + bz + a = 0$$

   possède deux solutions conjuguées.

   (b) Calculer le module de ces solutions.

   (c) Calculer le cosinus de l'argument de ces solutions.

10. Donner la forme algébrique des racines cubiques de $2 + 2i$. Représenter ces racines dans le plan de Gauss. Donner la valeur de leur produit.

11. (a) Calculer $(1+\omega)^n$, où ω est une racine cubique de 1 (n entier positif).

    (b) Combien de valeurs différentes obtient-on quand $\omega \neq 1$? Lesquelles ?

12. Calculer les racines carrées de $-16 - 30i$.

13. Résoudre l'équation

$$z^2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}|z| + 4i \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

    Suggestion : Egaler les modules des deux membres pour déterminer $|z|$.

14. Si z_1, z_2, z_3 désignent les trois racines du polynôme

$$24z^3 - 26z^2 + 9z - 1,$$

    calculer

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}.$$

    Suggestion : identifier le polynôme et sa décomposition en facteurs pour obtenir la somme, le produit et la somme des produits 2 à 2 des racines.

15. Déterminer les formes algébrique et trigonométrique des racines cubiques de $(-i)$.

16. (a) Résoudre l'équation

$$(z+1)^3 = iz^3 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

    (b) Vérifier que les points représentatifs des solutions dans le plan "complexe" sont situés sur une même droite parallèle à l'axe "imaginaire".

17. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{1+iz}$ lorsque $|z| = 1$ $(z \in \mathbb{C})$.

18. Soit n un entier naturel.

    (a) En utilisant la formule de de Moivre et celle du binôme de Newton, donner deux expressions différentes de

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n.$$

    (b) En déduire la formule suivante :

$$\tan(n\theta) = \tan\theta \cdot \frac{n - C_n^3 \tan^2\theta + C_n^5 \tan^4\theta - \cdots}{1 - C_n^2 \tan^2\theta + C_n^4 \tan^4\theta - \cdots}$$

    (c) En déduire que les racines du polynôme

$$p(x) = x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7$$

    sont les réels $-\tan(\frac{\pi}{7})$, $\tan(\frac{\pi}{7})$, $-\tan(\frac{2\pi}{7})$, $\tan(\frac{2\pi}{7})$, $-\tan(\frac{3\pi}{7})$ et $\tan(\frac{3\pi}{7})$.

    (d) En conclure que si α est une racine du polynôme $p(x)$ dont il est question au point précédent, alors $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ est également une racine de $p(x)$.

19. Résoudre dans $\mathbb{C}$

    (a) $(1+i)z^2 + (1-5i)z - (4-2i) = 0$.

    (b) $z^4 + z^2 = 12$.

    (c) $z^n - z^{n-1} - z + 1 = 0$ $(n > 1)$.

20. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$ sachant qu'elle a une racine réelle

$$z^3 - (\sqrt{2} + 4i)z^2 - 4(1 - \sqrt{2}i)z + 4\sqrt{2} = 0.$$

21. Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation suivante admet-elle deux racines réelles

$$(2+i)z^2 + (6+i\lambda)z - 4 - 2i = 0?$$

    Quelles sont ces racines ?

22. Démontrer que, quelques soient les complexes α et β, on a

$$|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right).$$

23. Démontrer que l'expression suivante

$$\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i}$$

est réelle.

24. Dans le plan de Gauss, déterminer le lieu des nombres complexes z tels que

$$z+\overline{z}=|z|.$$

25. Montrer que, quelques soient les complexes a et b, si $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, alors on a

$$|a+b|^2+|a+\omega b|^2+|a+\omega^2 b|^2=3|a|^2+3|b|^2.$$

26. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0.$$

Généraliser ensuite le résultat lorsque n est un naturel non nul

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0.$$

27. Si $x\in\mathbb{C}_0$ et si $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, montrer que

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta.$$

Suggestion : commencer par résoudre $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$.

28. Résoudre l'équation (en nombres complexes) :

$$(2z^2-1)^3=(z^2+1)^3.$$

29. Résoudre l'équation (en nombres complexes) :

$$z^8+4z^6-10z^4+4z^2+1=0.$$

Suggestion : développer $(z^2+1)^4$.

30. On donne les nombres complexes

$$z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = -1 + 2i, z_3 = i, z_4 = 1 + \sqrt{3}i.$$

    (a) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_4}$ et $(z_3)^2$.

    (b) Donner la forme trigonométrique de z_4. En déduire le calcul de z_4 à la sixième puissance.

    (c) Calculer $|z_1|$, $\left|\frac{z_1}{z_4}\right|$, $|z_1 z_2|$ et $|(z_3)^3|$.

31. Soit les complexes $3 - 4i$, $2 + i$, $-3 + 4i$, $2i$ et π. Calculer le module, la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué de ces complexes.

32. Simplifier la fraction
$$\frac{(1+i)^3 + 2i(i-1)}{2i}.$$

33. Si $2e^{i\pi/7}$ est une racine quatrième de z, quelles sont les autres racines quatrièmes de z ? Représenter ces racines dans le plan complexe.

34. Montrer que si z est un nombre complexe différent de 1, on a
$$\Re\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \quad \text{et} \quad \Im\frac{1+z}{1-z} = \frac{2\Im z}{|1-z|^2}.$$

35. Répondre par vrai, faux ou n'a pas de sens.

    (a) La somme de deux racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité a pour module 1.

    (b) $i < 2$.

    (c) Le produit de deux racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité a pour module 1.

    (d) $||x| + |y|| \leq |x| + |y|$.

    (e) $\Re z \leq |z|$.

    (f) La somme des racines 5 $^{\text{èmes}}$ de $3 + i$ est nulle.

36. Démontrer que si a et b sont des nombres complexes distincts de module 1, alors pour tout $z \in C$,
$$\frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{b-a}$$
est imaginaire pur.

37. Soit z un nombre complexe de module 1 tel que z ne soit pas un réel et soit a un nombre complexe. Montrer que

$$|a - z| = |1 - az|$$

si et seulement si a est un réel.

38. (09/10) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$i(1 + z)^4 = 1.$$

39. (07/11) Résoudre l'équation

$$z^4 + |z| = 0.$$

Suggestion : calculer d'abord $|z|$.

8.10.2 Complexes et analyse combinatoire

1. Calculer de deux façons différentes

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}.$$

En déduire que

$$2C_{10}^1 - 2C_{10}^3 + C_{10}^5 = 2^5.$$

2. Soit le nombre complexe

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5.$$

Déterminer une expression de $\cos^5\theta$ en fonction de $\cos\theta$, de $\sin^5\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et de $\text{tg}^5\theta$ en fonction de $\text{tg}\theta$ (suggestion : exprimer le complexe sous deux formes différentes).

3. Calculer

$$S = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$$

(suggestion : remarquer que les angles sont en progression arithmétique de raison r que l'on déterminera).

Chapitre 9

Polynômes dans $\mathbb{C}$

9.1 Définitions

Un polynôme de z est une combinaison linéaire à coefficients complexes de puissances naturelles de z. Un polynôme $P(z)$ s'écrit donc sous la forme

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

où $a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, 1, \cdots, n$.
n est alors le degré de $P(z)$.

9.2 Division polynomiale

9.2.1 Définitions

On peut démontrer le théorème suivant :
Si $P(z)$ et $D(z)$ sont deux polynômes tels que degré $P >$ degré D, alors il existe deux polynômes uniques $Q(z)$ et $R(z)$ tels que

$$P(z) = D(z) \cdot Q(z) + R(z)$$

et

$$\text{degre } R < \text{degre } D$$

On définit alors les notions suivantes :

Les polynômes $Q(z)$ et $R(z)$ sont respectivement appelés quotient et reste de la division de P par D.

Le polynôme $P(z)$ est divisible par $D(z)$ ssi $R(z) = 0$.

9.2.2 Loi du reste

Théorème :

Le reste de la division de $P(z)$ par $x - a$ est $P(a)$.

Corrolaire :

Un polynôme $P(z)$ est divisible par $x - a$ ssi $P(a) = 0$.

On dit alors que a est un zéro de $P(z)$ et on a

$$P(z) = (z - a) \cdot Q(z).$$

9.2.3 Zéro multiple

Si α est un naturel non nul, un réel a est zéro de multiplicité α de $P(z)$ si $P(z) = (z - a)^\alpha \cdot Q(z)$ où $Q(a) \neq 0$.

On peut démontrer que a est un zéro de multiplicité α ssi le polynôme et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$ s'annulent en a càd ssi $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$ et $\ldots$ et $P^{(\alpha-1)}(a) = 0$.

9.3 Théorême fondamental de l'algèbre

Un polynôme $P(z)$ de degré n admet n zéros complexes comptés avec leurs multiplicités.

Ainsi, si $P(z)$ est un polynôme de degré n et si $a_1, \cdots, a_p$ sont des zéros de $P(z)$ de multiplicités respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$, alors

$$P(z) = a_n (z - a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_p)^{\alpha_p}.$$

Conséquence : Identification des coefficients

- Deux polynômes de degré n prennent les mêmes valeurs en au moins n points ssi leurs coefficients correspondants sont proportionnels.

- Deux polynômes de degré n prennent les mêmes valeurs en au moins $n + 1$ points ssi leurs coefficients correspondants sont égaux.

9.4 Polynômes à coefficients réels

9.4.1 Théorème

Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients réels.
Si z_0 est un zéro de multiplicité α de $P(z)$, alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi un zéro de multiplicité α de $P(z)$.

9.4.2 Conséquences

- Un polynôme à coefficients réels admet toujours un nombre pair de zéros complexes (non réels) conjugués.
- Un polynôme de degré impair à coefficients réels admet toujours au moins un zéro réel.
- De plus, le nombre de zéros réels d'un polynôme de degré impair à coefficients réels est impair (comptés avec leurs multiplicités).
- Le nombre de zéros réels, comptés avec leurs multiplicités) d'un polynôme de degré pair à coefficients réels est toujours pair (éventuellement nul).

9.5 Exercices

1. Décomposer $2a^3 + b^3 - 3a^2b$ en facteurs polynomiaux du premier degré.
2. Quelles conditions faut-il imposer aux nombres réels a et b pour que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 1$ possède deux racines réelles distinctes et opposées ?

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + 1 + i \; = \; 0.$$

Remarque : on demande seulement les formes trigonométriques des racines.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^3 - 7x^2 - 28x + 160 \; = \; 0$$

sachant qu'elle admet une racine négative ainsi que deux racines positives dont l'une est le double de l'autre.

4. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^3 + 4z + \frac{1}{z} \; = \; 0.$$

Suggestion : on donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque racine.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4x^3 - 6x^2 - 12x + 9 \; = \; 0$$

sachant qu'elle admet une racine négative, ainsi que deux racines positives dont le quotient est $2 + \sqrt{3}$.

5. (a) Construire un polynômedu troisième degré P_1 tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) \; = \; P_1(n)$$

pour tout entier naturel n. Justifier le résultat proposé, par exemple par la méthode de récurrence.

(b) Généralisation : pour quelles valeurs de k existe-t-il un polynôme du troisième degré P_k tel que

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+k) \; = \; P_k(n)$$

pour tout entier naturel n ? Justifier la réponse.

6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 9z^3 + 33z^2 - 54z + 36 = 0\,,$$

sachant qu'aucune racine n'est réelle et que l'une est double d'une autre.

7. (a) Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z + 2\cos\alpha)^2 = \frac{1}{z^2}\,.$$

   (b) Trouver tous les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$(z + 2\cos\alpha)^4 = \frac{1}{z^4}\,.$$

8. Pour des entiers $n > 0$ et $p \geq 0$ on note $S(n,p)$ la somme des p^{emes} puissances des entiers positifs de 1 à n inclus :

$$S(n,p) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^p \;=\; 1^p + \cdots + n^p\,.$$

   (a) Démontrer que

$$S(n,0) = n\,;$$
$$S(n,1) = \tfrac{1}{2}n(n+1)\,;$$
$$S(n,3) = \left[\tfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2\,.$$

   (b) En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer l'égalité

$$pS(n,p-1) \;=\; (n+1)^p - 1 - \sum_{k=0}^{p-2} C_p^k S(n,k)\,,$$

   valable pour tous entiers $p > 0$ et $n \geq 0$ et retrouver ainsi les égalités du point a.

   (c) Démontrer que $S(n,p-1)$ est un polynôme de degré p en la variable n dont le coefficient du terme de degré p est $1/p$ et dont le terme indépendant est nul.

9. Déterminer tous les polynômes $P(x)$ qui vérifient, pour tout x, la relation

$$P(2x) = P'(x)P''(x)$$

   où $P'(x)$ et $P''(x)$ désignent respectivement les dérivées première et seconde du polynôme $P(x)$.

   Suggestion : commencer par déterminer le degré n d'un polynôme $P(x)$ qui vérifie cette relation.

10. Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^3 + mx^2 + 42x + 40$. Déterminer le réel m sachant que la somme de deux racines de $P(x)$ est égale à la somme des deux autres racines.

11. Déterminer le polynôme $P(x)$ du quatrème degré tel que

(a) le coefficient de x^4 dans $P(x)$ vaut 1,

(b) $P(x)$ est divisible par x^2+x+1,

(c) le reste de la division $P(x)$ par x^2-1 est $-3x+9$.

Donner les racines réelles de l'équation $P(x)=0$.

12. Trouver un réel m tel que les quatre racines de l'équation

$$x^4-(3m+1)x^2+m^2=0$$

soient quatre réels distincts en progression arithmétique. Quelles sont alors ces quatre racines ?

13. Déterminer les réels a, b et c tels que le polynôme

$$P(x)=2x^4+x^3+ax^2+bx+c$$

soit divisible par $(x-1)^2(x+1)$. Factoriser ensuite le polynôme.

14. Démontrer que, pour tout naturel n strictement supérieur à 1, le polynôme

$$x^n-x^{n-2}-2x+2$$

est divisible par $(x-1)^2$. Déterminer le quotient.

15. Déterminer le quotient et le reste de la division de (x^7-a^7) par $(x-a)$ avec a réel. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{6} 3^k$.

16. Soient $Q_1(x)$ et $R_1(x)$ respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x-a$ et, $Q_2(x)$ et $R_2(x)$ respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x-b$ $(a \neq b)$.
Quel est le reste $R(x)$ de la division de $P(x)$ par $(x-a)(x-b)$?
Si on appelle $Q_3(x)$ le quotient de cette division, Déterminer une expression de $Q_1(x)$ en fonction de $Q_3(x)$.

17. Démontrer la condition nécessaire et suffisante suivante :

un polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)^2$ si et seulement si $P(a)=P'(a)=0$ où $P'(x)$ désigne la dérivée première du polynôme $P(x)$.

18. Résoudre l'équation $4x^3-24x^2+23x+18=0$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

19. Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme

$$P(x) = x^5 + bx^4 + ax^3 + a^2 + x^2 + b^2x + b$$

soit divisible par $x^2 + b$.

20. Déterminer les coefficients du polynôme $P(x)$ sachant que
    (a) il est du quatrième degré,
    (b) la somme des racines est égale à 6,
    (c) le produit des racines est égal à - 24,
    (d) il est divisible par $x^2 - 2x - 8$,
    (e) le reste de la division par $x - 2$ vaut 8.

    Calculer les quatres racines du polynôme trouvé.

21. Déterminer le(s) polynôme(s) $P(x)$ de degré six ayant les propriétés suivantes
    (a) le coefficient de x^6 est égal à 1,
    (b) les coefficients de x^3 et de x^4 sont égaux,
    (c) le polynôme $P(x)$ est divisible par $x^2 - x + 1$,
    (d) le polynôme $\dfrac{P(x)}{x^2+x+1} - \dfrac{P(x)}{x^2-x+1}$ est divisible par $x^2 - x$.

    Ensuite, calculer toutes les racines de $P(x)$.

22. Soit un polynôme de degré trois à coefficients réels

$$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c.$$

    Déterminer tous les réels a, b et c tels que le polynôme $P(x)$ admette ces mêmes nombres a, b, c comme racines.

23. Déterminer le polynôme $P(x)$ du troisième degré (ayant trois racines, réelles ou complexes) tels que
    — le coefficient de x^3 vaut 1,
    — la somme des racines de $P(x)$ vaut -3,
    — la somme des carrés des racines de $P(x)$ vaut 7,
    — le produit des racines de $P(x)$ vaut 5.

    Ensuite, déterminer toutes les raines réelles ou complexes de $P(x)$.

24. Factoriser le polynôme

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4$$

sachant que l'équation $P(x) = 0$ admet deux racines dont le produit vaut -1.

25. Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

    (a) $P_1(z) = z^{2n} - 2z^n + 2$,

    (b) $P_2(z) = z^{2n} + z^n + 1$.

26. Montrer que $z = 1$ est un zéro triple pour chaque polynôme

    (a) $P_1(z) = z^{2n} - nz^{n+1} + nz^{n-1} - 1$, avec $n > 1$,

    (b) $P_2(z) = z^{2n+1} - (2n+1)z^{n+1} + (2n+1)z^{n-1} - 1$, avec $n > 1$.

27. Soit z un nombre complexe. Le polynôme $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ admet pour racines les complexes α, β et γ. Montrer que

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c. \end{cases}$$

Chapitre 10

Calcul matriciel

10.1 Définitions

On appelle matrice à n lignes et p colonnes un tableau rectangulaire de nombres comportant n lignes et p colonnes. Chacun de ces nombres est appelé un élément de la matrice.
On appelle indifféremment rangée d'une matrice une ligne ou une colonne.
Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions (2,3).
Si la matrice s'appelle A, l'élément de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne est noté $(A)_{ij}$ ou plus simplement a_{ij}.
Une matrice qui ne comporte qu'une seule ligne est appelée matrice-ligne.
Une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne est appelée matrice-colonne.
Une matrice est carrée si elle possède autant de lignes que de colonnes (si $n = p$).
Une matrice carrée est diagonale ssi $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.
Une matrice carrée est symétrique ssi $a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$.
L'ensemble des matrices réelles de n lignes et p colonnes est noté $\mathbb{R}_{(n,p)}$.

10.2 Propriétés

10.2.1 Egalité

Deux matrices de mêmes dimensions sont égales si tous leurs éléments correspondants sont égaux.
Si A et B sont deux matrices de $\mathbb{R}_{(n,p)}$, alors

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

10.2.2 Transposée

La transposée d'une matrice s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice. Ainsi, si les dimensions de la matrice de départ sont (n, p), les dimensions de la transposée sont (p, n).

Si A est une matrice de $\mathbb{R}_{(n,p)}$, la transposée de A est la matrice de $\mathbb{R}_{(p,n)}$, notée $\widetilde{A}$ ou A^T telle que

$$\widetilde{A}_{ij} = A_{ji}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

10.2.3 Multiplication par un scalaire

Si A est une matrice de $\mathbb{R}_{(n,p)}$, le produit de la matrice A par le réel α est la matrice de $\mathbb{R}_{(n,p)}$, notée αA telle que

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ji}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

Pour multiplier une matrice par un scalaire, il faut donc multiplier chacun des éléments par ce scalaire.

10.2.4 Somme

Si A et B sont deux matrices de $\mathbb{R}_{(n,p)}$, alors la somme des matrices A et B est la matrice de $\mathbb{R}_{(n,p)}$ notée $A + B$ telle que

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

Pour additionner deux matrices de mêmes dimensions, il faut donc additionner les éléments correspondants.

On peut démontrer sans problème que $\mathbb{R}_{(n,p)}$ muni de l'addition est un groupe commutatif.
Remarque :
Le neutre pour l'addition des matrices dans $\mathbb{R}_{(n,p)}$ est appelée la matrice nulle. Elle est notée O. Cette notation est ambigue car elle ne stipule pas la dimension de cette matrice O.

10.2.5 Produit

Définition

Si A est une matrice de $\mathbb{R}_{(n,p)}$ et B une matrice de $\mathbb{R}_{(p,q)}$, alors le produit des matrices A et B est la matrice de $\mathbb{R}_{(n,q)}$ notée AB telle que

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q.$$

Remarques

- On appelle parfois ce type de produit le produit "ligne par colonne".
- De par sa définition, on voit de suite que le produit de deux matrices n'existe pas toujours. Il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la deuxième.

  Ainsi, on ne peut pas multiplier deux matrices de $\mathbb{R}_{(2,4)}$ entre elles.

  Le produit de deux matrices n'est donc ni interne, ni partout défini.
- Par contre, dans la cas particulier du produit de deux matrices carrées de mêmes dimensions, le produit est interne et partout défini.
- Toujours par la définition, on voit que le produit de deux matrices n'est pas commutatif.
  - Le produit AB peut exister sans que BA n'existe.

    Ainsi, si $A \in \mathbb{R}_{(3,2)}$ et $B \in \mathbb{R}_{(2,4)}$, alors $AB \in \mathbb{R}_{(3,4)}$ et BA n'existe pas.
  - Mais même si AB et BA existent simultanément, elles peuvent ne pas avoir les mêmes dimensions.

    Ainsi, si $A \in \mathbb{R}_{(3,2)}$ et $B \in \mathbb{R}_{(2,3)}$, alors $AB \in \mathbb{R}_{(3,3)}$ et $BA \in \mathbb{R}_{(2,2)}$.

— Enfin, même si AB et BA existent toutes les deux et ont les mêmes dimensions (si A et B sont carrées de même dimension), elles peuvent très bien êtres différentes.

Conséquence, des formules telles que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sont fausses ! On a $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

Propriétés

- Lorsqu'il existe, le produit matriciel est associatif
- Si $A \in \mathbb{R}_{(n,p)}$ et $I \in \mathbb{R}_{(p,p)}$ est la matrice $diag(1, 1, \cdots, 1)$, alors $AI = A$.
- Si $A \in \mathbb{R}_{(n,p)}$ et $I \in \mathbb{R}_{(n,n)}$ est la matrice $diag(1, 1, \cdots, 1)$, alors $IA = A$.
- Si A et $I \in \mathbb{R}_{(n,n)}$ où $I = diag(1, 1, \cdots, 1)$, alors $IA = A = AI$. On dit que I est la matrice neutre.

10.2.6 Particularités

Certaines propriétés usuelles d'algèbre avec les nombres ne sont pas vraies avec les matrices.

- Pour certaines matrices, il existe plusieurs matrices X telles $AX = A$.

  On ne peut donc pas simplifier $AX = A$ en $X = I$!

  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- De même, il existe des matrices non nulles telles que leur produit est nul.

  On ne peut donc pas conclure $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ces particularités sont dues au fait que certaines matrices n'admettent pas d'inverse (voir chapitre suivant).

Chapitre 11

Déterminants

11.1 Définition

Toute matrice carrée admet un déterminant. Une définition générale peut être donnée. Comme le programme n'exige la connaissance des déterminants que de taille 3 maximum, nous nous contenterons de ne définir que ceux-ci.

La définition peut alors être donnée en fonction de la taille de la matrice :

- Si $A = (a)$ est une matrice carrée de dimension 1, alors le déterminant de A est le nombre, noté $detA$ ou $dtmA$ tel que

$$detA = a.$$

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 2, alors le déterminant de A est le nombre, noté $detA$ ou $dtmA$ tel que

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3, alors le déterminant de A est le nombre, noté $detA$ ou $dtmA$ tel que

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Remarques :

- Cette dernière définition est appelée règle de Sarrus.
- Les trois définitions ne sont que des cas particuliers de la définition générale.
- Une matrice dont le déterminant est nul est dite singulière.

11.2 Règles des mineurs

11.2.1 Définition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée de dimension n, alors on appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant de dimension $n-1$ obtenu en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de A. Exemple :
Si A est la matrice de dimension 3 décrite plus haut, le mineur de l'élément a_{12} est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée de dimension n, on appelle cofacteur de l'élément a_{ij} le produit de son mineur par $(-1)^{i+j}$.

11.2.2 Première règle des mineurs

Si A est une matrice carrée de dimension n, alors $detA$ est égal à la somme des produits des éléments d'une rangée par leurs cofacteurs.
On peut constater l'exactitude de cette propriété sur la définition d'un déterminant de dimension 3 :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\right) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Remarque :

Cette propriété est aussi parfois utilisée comme définition d'un déterminant.

11.2.3 Deuxième règle des mineurs

Si A est une matrice carrée de dimension n, alors la somme des produits des éléments d'une rangée par les cofacteurs des éléments d'une rangée parallèle est nulle.

11.3 Propriétés

Toutes les propriétés énoncées ici sont valables quelques soient la dimension des matrices carrées.

1. Si une rangée d'une matrice est nulle, son déterminant est nul.
2. Si on permute deux rangées parallèles d'une matrice, alors le déterminant change de signe.
3. Si une matrice a deux rangées parallèles égales, alors son déterminant est nul.
4. Si on mutiplie tous les éléments d'une rangée par un nombre α, alors le déterminant de la matrice est multiplié par α^n.
   Corrolaire :
   si on multiplie une matrice A de dimension n par le réel α, alors det $\alpha A = \alpha^n$ det A.
5. Si deux rangées parallèles d'une matrice sont multiples l'une de l'autre, le déterminant est nul.
6. Si deux déterminants ne diffèrent que par les éléments d'une même rangée, alors la somme de ces deux déterminants est égale au déterminant obtenu en additionnant les éléments des rangées différentes et en laissant inchangées les rangées communes.
   Ex :
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
7. Si une rangée est combinaison linéaire des autres rangées parallèles, alors le déterminant est nul.

8. Réciproquement, le déterminant d'une matrice est nul si les rangées parallèles sont linéairement dépendantes.
9. Si on ajoute à une rangée une combinaison linéaire de rangées parallèles, le déterminant de la matrice ne change pas.
10. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.
11. Le déterminant du produit de deux matrices carrées de mêmes dimensions est égal au produit des déterminants.

Chapitre 12

Matrice inverse

12.1 Problème

La notion d'inverse d'un nombre est naturelle : l'inverse du nombre non nul a est le nombre $\frac{1}{a}$ tel que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

puisque 1 est le neutre pour la multiplication des réels.
Comme le produit matriciel n'est interne et partout défini que dans l'ensemble des matrices carrées de dimension n, il est logique de ne chercher l'inverse que d'une matrice carrée.
Comme il existe une matrice

$$I = diag(1, 1, \cdots, 1)$$

qui est neutre pour la multiplication des matrices carrées de dimension n, il est donc logique de se poser la question de l'existence d'une matrice inverse d'une matrice A.
Enfin, comme la multiplication des matrices n'est pas commutative, il serait logique de penser que pour une matrice A donnée, il existe une matrice A_g inverse à gauche telle que

$$A_g A = I$$

et une matrice A_d inverse à droite telle que

$$A \cdot A_d = I$$

.

12.2 Existence et unicité de la matrice inverse

On peut démontrer successivement les propriétés suivantes :

1. Si une matrice A admet une inverse à gauche A_g et une inverse à droite A_d, alors les inverses sont égales.

   Conséquence : on ne fera plus la distinction entre inverse à gauche et inverse à droite. On parlera de matrice inverse.

2. Si une matrice A admet une matrice inverse, alors cette inverse est unique.

   Conséquence : on parlera donc de LA matrice inverse d'une matrice donnée. On la notera A^{-1}

3. Si une matrice admet une inverse, alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

   Conséquence : si $\det A = 0$, alors A n'admet pas de matrice inverse

4. Si $\det A \neq 0$, alors

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}$$

   où $\mathcal{A}$ est la matrice des cofacteurs des éléments de A.

Remarque :

Une matrice qui admet une inverse est dite inversible.

12.3 Propriétés

- L'inverse du produit de deux matrices carrées de même dimensions est égale au produit des inverses des deux matrices dans l'ordre inverse

  $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

  Cette propriété n'a de sens que si A et B sont inversibles.

- Si A est inversible, alors l'inverse de l'inverse de A est A.

  $$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Chapitre 13

Systèmes linéaires

13.1 Définitions

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ un ensemble d'équations du 1er degré du type

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

On peut écrire un tel système sous la forme matricielle

$$TX = B$$

où

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est la matrice colonne qui contient les inconnues,
- $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ est la matrice de dimensions (n, p) qui contient les coefficients des inconnues,

- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne qui contient les termes indépendants.

Résoudre un système consiste à trouver les valeurs des inconnues qui vérifient chacune des équations. Une solution d'un système de n équations à p inconnues est donc un ensemble ordonné de p nombres.

Deux systèmes sont équivalents s'ils sont le même ensemble de solutions.

Un système est compatible s'il admet au moins une solution. Il est incompatible (ou impossible) s'il n'admet aucune solution.

Si un système compatible admet plusieurs solutions, il est dit indéterminé.

Un système est homogène si le terme indépendant de chaque équation est nul. Il s'écrit alors $TX = 0$.

Un système est dit carré s'il comporte autant d'inconnues que d'équations. On a alors $n = p$ et la matrice T est carrée.

13.2 Principes d'équivalence

Pour résoudre un système de n équations à p inconnues, on le transforme en un système plus simple qui lui est équivalent. Pour cela, on peut appliquer les règles suivantes :

1. on peut permuter deux équations,
2. on peut appliquer à chaque équation les principes d'équivalence des équations,
3. on peut ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations,
4. on peut supprimer une équation qui est une combinaison linéaire des autres équations (équation redondante).

13.3 Propriétés des solutions d'un système

- Si un système admet deux solutions distinctes, alors il en admet une infinité.
  Conséquence : un système admet donc 0, 1 ou une infinité de solutions.
- Un système homogène est toujours compatible ; il admet toujours la solution

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces propriétés se comprennent très facilement si on veut bien faire le lien avec la géométrie analytique.
Si on considère un système de deux équations à deux inconnues, les deux équations sont celles de droites. Or, dans le plan, ces droites ne peuvent être que strictement parallèles (système impossible), sécantes (1 seule solution) ou confondues (une infinité de solutions). Pour un système de 3 équations à 3 inconnues, chacune des équations est celle d'un plan dans l'espace.

Enfin, si le système est homogène, toutes les droites (2 inconnues) ou tous les plans (3 inconnues) passent par l'origine.

13.4 Méthodes générales de résolution

13.4.1 Par substitution

Cette méthode consiste à exprimer une inconnue en fonction des autres dans une équation, puis à remplacer cette inconnue par l'expression obtenue dans les autres équations.
Exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & -y & =1 \\ 2x & -y & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & & =1+y \\ 2(1+y) & -y & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & & =1+y \\ & y & =-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & & =0 \\ & y & =-1 \end{array}\right.$$

13.4.2 Par combinaisons linéaires

Cette méthode consiste, conformément au 3eme principe d'équivalence décrit ci-dessus, à ajouter (ou retrancher) à une équation une combinaison linéaire des autres équations afin de faire disparaître une ou plusieurs inconnues de cette équation.

13.4.3 Méthode de Gauss ou du pivot

Cette méthode consiste, conformément au 3eme principe d'équivalence décrit ci-dessus, à ajouter (ou retrancher) à chacune (sauf une) des équations un multiple de la dernière équation afin de faire rendre la matrice T des coefficients triangulaire (ou diagonale).

Exemple :

Remarque :
Une autre façon de visualiser la méthode est de se dire qu'on recherche une forme échelonnée du système où la première équation dépend des p inconnues, la seconde équation dépend de $p-1$ inconnues, $\cdots$, l'avant dernière dépend de 2 inconnues et la dernière d'une seule inconnue. Ensuite, on résoud les équations dans l'ordre inverse, en "remontant" à partir de cette dernière équation à une inconnue.

13.5 Systèmes carrés

13.5.1 Par la matrice inverse

Cette méthode est plus théorique que pratique. Mais si T admet une matrice inverse, càd si $\det T \neq 0$, alors le système $TX = B$ admet $X = T^{-1}B$ comme solution unique.

13.5.2 Méthode de Cramer

La méthode de Cramer est basée sur la propriété suivante :

si $\det T \neq 0$, le système $TX = B$ admet la solution unique $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ où

$$X_i = \frac{|C_1 \cdots B \cdots C_n|}{\det T}$$

dont le numérateur est le déterminant de T dont on a remplacé la i^{eme} colonne par la colonne des termes indépendants.

Cette méthode se prête très bien à la discussion des systèmes paramétriques carrés.

13.5.3 Systèmes rectangulaires où $n > p$

Si un système comporte plus d'équations que d'inconnues, on peut chercher à le transformer en système carré en

— ne conservant que p équations,

— résolvant le système de p équations à p inconnues,

— vérifiant que les solutions obtenues vérifient aussi les $n - p$ équations écartées au départ.

13.6 Exercices

1. (09/09) Résoudre et discuter le système suivant suivant dans lequel a est un paramètre réel
$$\begin{cases} 2ax + (a+1)y + (a-1)z = 2a+3 \\ 2x + (a+1)y + (1-a)z = 4a+1 \\ (a+1)x + (a+1)y = 3a+2 \end{cases}$$
2. (09/10) Résoudre et discuter le système suivant dans lequel a est un paramètre réel
$$\begin{cases} (a+6)x + 2y + a(a+4)z = 1 \\ 2x - (a+1)y - 2az = 17+a \\ (a+10)x + (a^2-15)y + a^2z = 35+a \end{cases}$$

Table des matières