Une « équation symétrique » (Université de Liège 2010)

Résoudre l'équation $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \,.\cos x$.

On utilise le changement de variable $x = y + \frac{\pi}{4}$ (il faut le savoir !).

Utilisant les formules d'addition, nous obtenons :

$$\sin x = \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \sin y \,.\cos\frac{\pi}{4} + \cos y \,.\sin\frac{\pi}{4} = \sin y \,.\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos y \,.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.(\sin y + \cos y) \ ,$$

$$\cos x = \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \cos y \,.\cos\frac{\pi}{4} - \sin y \,.\sin\frac{\pi}{4} = \cos y \,.\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin y \,.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.(\cos y - \sin y) \ .$$

Suite de la solution dans le fascicule « trigonometrie_synthese » de l'Université de Liège (pp 37-38).

Autre méthode

Multiplier le second membre par $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$! Il faut y penser …
De cette façon, nous obtenons une équation homogène(*) de degré 4 .

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \,.\cos x \,.(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^3 x \,.\cos x + \sin x \,.\cos^3 x$$

Les solutions de $\cos x = 0$ n'étant pas solutions de l'équation précédente, nous pouvons diviser chacun de ses membres par $\cos^4 x$. Nous obtenons ainsi :

$$\tan^4 x + 1 = \tan^3 x + \tan x \quad \Leftrightarrow \quad \tan^4 x - \tan^3 x - \tan x + 1 = 0$$

Il est possible de résoudre cette équation par groupements (si ce n'était pas le cas, il faudrait penser à la méthode de HORNER) :

$$\tan^3 x \,.(\tan x - 1) - (\tan x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tan x - 1).(\tan^3 x - 1) = 0$$

La seule possibilité est $\tan x = 1$ ce qui donne $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

(*) Voir cours de trigonométrie de 5^e , page 22 (exercices page 24).