DÉMONTRER DES IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES - PREMIERS PAS

1. Démontrer les identités suivantes.

   a) $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos(2a)$

   b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3.\sin^2 x.\cos^2 x$

   c) $\sin x + 2\sin(2x) + \sin(3x) = 4.\sin(2x).\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   d) $\sin a = \dfrac{2\cot\left(\dfrac{a}{2}\right)}{1+\cot^2\left(\dfrac{a}{2}\right)}$

   e) $\cos a = \dfrac{\cot^2\left(\dfrac{a}{2}\right)-1}{\cot^2\left(\dfrac{a}{2}\right)+1}$

   f) $\dfrac{\cos^3 a + \sin^3 a}{\cos a + \sin a} = 1 - \dfrac{1}{2}\sin(2a)$

   g) $\cot a - \tan a = 2.\cot(2a)$

   h) $1 - \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}.\cos\left(\dfrac{x}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

   i) $4.\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\sin\left(\dfrac{b+c}{2}\right).\sin\left(\dfrac{c+a}{2}\right) = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

---

2. Montrer que l'expression suivante est indépendante de x :

$$\cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a+x) + \cos^2(a+x)\ .$$

---

3. Si a , b et c sont les mesures en radians des angles intérieurs d'un triangle, montrer que :

   a) $\sin a + \sin b - \sin c = 4.\sin\left(\dfrac{a}{2}\right).\sin\left(\dfrac{b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{c}{2}\right)$

   b) $\cot a.\cot b + \cot b.\cot c + \cot c.\cot a = 1$

   c) $\dfrac{\cos a}{\sin b.\sin c} + \dfrac{\cos b}{\sin c.\sin a} + \dfrac{\cos c}{\sin b.\sin a} = 2$

4. Si a , b et c sont les mesures en radians des angles intérieurs d'un triangle et que $b - c = \frac{\pi}{2}$,

   a) montrer que : $2.\tan a + \tan b + \tan c = 0$;

   b) calculer ensuite a , b et c si l'on sait que $\tan b + \tan c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

---

5. Montrer que le triangle ABC est rectangle si ses angles vérifient la relation

$$\tan b = \frac{\cos(c-b)}{\sin a + \sin(c-b)} \ .$$

(on note a , b et c les amplitudes respectives de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$).

---

6. Même question qu'au numéro (5) sachant que

$$\sin a - \cos a = \cos b - \sin b \ .$$

---

7. Montrer que si les angles a , b et c d'un triangle vérifient la relation

$$\sin(3a) + \sin(3b) + \sin(3c) = 0 \ ,$$

alors un des angles mesure $60°$.

DÉMONSTRATIONS D'IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES - PREMIERS PAS.

① a) 1^{er} membre $= \cos^4 a - \sin^4 a$

$$= \underbrace{(\cos^2 a - \sin^2 a)}_{\cos 2a}\underbrace{(\cos^2 a + \sin^2 a)}_{1}$$

$$= \cos 2a = 2^{nd} \text{ membre}$$

Note : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$x^6 - y^6 = (x^3-y^3)(x^3+y^3)$

etc.

b) D'abord se rappeler que $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

donc $a^6+b^6 = (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

1^{er} membre $= \sin^6 x + \cos^6 x$

$$= \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} . (\sin^4 x \underbrace{- \sin^2 x . \cos^2 x}_{} + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^4 x + \underbrace{2 . \sin^2 x \cos^2 x}_{\text{introduction d'un double produit}} + \cos^4 x) \underbrace{- 3 \sin^2 x \cos^2 x}_{\text{compensation}}$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 2^{nd} \text{ membre.}$$

c) 1^{er} membre $= \underline{\sin x} + 2 \sin 2x + \underline{\sin 3x}$ (SIMPSON)

$$= 2 . \sin \frac{x+3x}{2} . \cos \frac{x-3x}{2} + 2 . \sin 2x$$

$$= 2 . \sin 2x . \cos(-x) + 2 . \sin 2x$$

$$= 2 . \sin 2x . [\cos x + 1] \quad \text{car } \cos(-x) = \cos x$$

$$= 2 . \sin 2x . [(2\cos^2 \tfrac{x}{2} \cancel{-1}) \cancel{+1}] \quad \text{(CARNOT)}$$

$$= 4 . \sin 2x . \cos^2 \frac{x}{2} = 2^{nd} \text{ membre.}$$

d) 2^{nd} membre $= \dfrac{2 \cdot \cot g \frac{a}{2}}{1 + \cot g^2 \frac{a}{2}} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\cos \frac{a}{2}}{\sin a/2}}{1 + \dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}}}$

$$= \frac{2 \cdot \dfrac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}}{\dfrac{\sin^2 a/2 + \cos^2 a/2}{\sin^2 \frac{a}{2}}} = \frac{\dfrac{2 \cdot \cos \frac{a}{2}}{\cancel{\sin a/2}}}{\dfrac{1}{\sin^{\cancel{2}} \frac{a}{2}}} = \frac{2 \cos \frac{a}{2}}{\dfrac{1}{\sin \frac{a}{2}}}$$

$= 2 \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{a}{2} = \sin a = 1^{er}$ membre.

Note $\quad \sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$

$\rightarrow \quad \sin a = 2 \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}$

Cette transformation de la formule de duplication pour sinus est souvent utilisée.

"Dans l'autre sens" aussi : $\sin 4a = 2 \cdot \sin 2a \cdot \cos 2a$
$\sin 6a = 2 \cdot \sin 3a \cdot \cos 3a$
etc.

e) Du même genre que le (d)

2^{nd} membre $= \dfrac{\cot g^2 \frac{a}{2} - 1}{\cot g^2 \frac{a}{2} + 1} = \dfrac{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}} - 1}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2}} + 1}$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\cancel{\sin^2 \frac{a}{2}}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2}}{\cancel{\sin^2 \frac{a}{2}}}} = \frac{\cos 2 \cdot \frac{a}{2}}{1} = \cos a = 1^{er} \text{ m}^{bre}.$$

Note $\quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$

et aussi $\cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a$, etc.

On peut aussi transformer les formules de CARNOT :

$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$

$\cos a = 2 \cdot \cos^2 \frac{a}{2} - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{a}{2}$

etc.

f) 1^{er} membre $= \dfrac{\cos^3 a + \sin^3 a}{\cos a + \sin a}$ le numérateur est une somme de deux cubes

$$= \frac{\cancel{(\cos a + \sin a)} \cdot (\cos^2 a - \cos a \cdot \sin a + \sin^2 a)}{\cancel{\cos a + \sin a}}$$

$$= 1 - \cos a \cdot \sin a = 1 - \frac{1}{2} \sin 2a = 2^{nd} \text{ m}^{bre}.$$

g) 1^{er} membre $= \text{cotg } a - \text{tg } a$

$$= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cdot \cos a}$$

$$= \frac{\cos 2a}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2a} = 2 \cdot \text{cotg } 2a = 2^{nd} \text{ membre}.$$

h) Voici deux façons de démontrer l'identité (il y en a sûrement d'autres).

$1^{ère}$ façon : partir du 1^{er} membre et introduire des "$\frac{x}{2}$" puisqu'il y en a dans le 2^{nd} m^{bre}.

$$1^{er} \text{ membre} = \cancel{1} - 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \underbrace{2\cos^2\frac{x}{2} - \cancel{1}}$$

on choisit cette formule pour se débarrasser de 1 et -1

$$= 2 \cdot \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

$$= \underbrace{2\cos\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}$$

ça, c'est très bien, on le garde

ici, ça fait penser à Simpson, mais il faut transformer pour avoir 2 cosinus ou 2 sinus :

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= 2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)\right]$$

(on a choisi mais les deux fonctionnent)

$= \ldots$

$$\ldots = 2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot (-2) \cdot \sin\frac{\cancel{\frac{x}{2}} + \frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{x}{2}}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}}{2}$$

$$= -4 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$$

$$= - 4 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \begin{array}{l} -\sin\alpha \\ = \sin(-\alpha) \end{array}$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \qquad (*)$$

Nous sommes proches du but.
Ce serait bien si $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ était égal à $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

C'est le cas ! En effet :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{x}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}$$

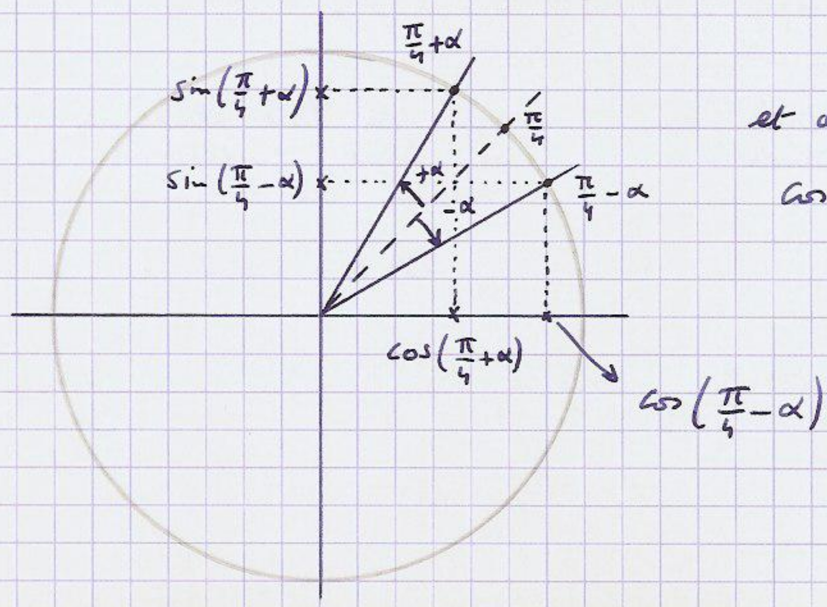
et donc :

$$(*) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2^{nd} \text{ membre.}$$

Il est intéressant de retenir l'égalité suivante :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

Elle se vérifie facilement grâce aux formules d'addition, mais elle est aussi bien illustrée par l'image ci-dessous.



et on a aussi

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

(2ème façon) La 1ère façon de travailler était très instructive, mais il y a plus court.

$$2^{nd} \text{ membre} = 2\sqrt{2}\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\Big(\underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\sqrt{2}/2}\,.\,\cos\frac{x}{2} - \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\sqrt{2}/2}\,.\,\sin\frac{x}{2}\Big)$$

$$= \cancel{2}\sqrt{2}\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\,.\,\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right) \quad (**)$$

$$= 2\,.\,\cos^2\frac{x}{2} - \underbrace{2\,.\,\cos\frac{x}{2}\,.\,\sin\frac{x}{2}}_{\sin x} = \ldots$$

or, d'après CARNOT : $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

$$\rightarrow \quad 2\cos^2\frac{x}{2} = \cos x + 1$$

$$\ldots = \cos x + 1 - \sin x = 1^{er} \text{ membre.}$$

(Remarque) L'égalité (**) est celle que nous avions trouvé à la page 3 (1ère façon, 3e ligne).

⚠ Une autre façon courante de travailler pour démontrer une identité est de développer les deux membres en parallèle jusqu'à obtenir la même expression des deux côtés !

i) $$2^{nd} \text{ membre} = \underbrace{\sin a + \sin b}\, + \underbrace{\sin c - \sin(a+b+c)}$$

Ici, c'est SIMPSON à tout va !

$$= 2\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,\cos\frac{a-b}{2} + \underbrace{2\,.\,\sin\frac{\cancel{c}-a-b-\cancel{c}}{2}}\,.\,\cos\frac{c+a+b+c}{2}$$

$$= 2\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,\cos\frac{a-b}{2}\left(-2\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\right).\cos\frac{a+b+2c}{2}$$

$$= 2\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b+2c}{2}\right)$$

$$= 2\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,(-2)\,.\,\sin\frac{\frac{a-\cancel{b}}{2}+\frac{a+\cancel{b}+2c}{2}}{2}\,.\,\sin\frac{\frac{\cancel{a}-b}{2}-\frac{\cancel{a}+b+2c}{2}}{2}$$

$$= -4\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,\sin\frac{a+c}{2}\,.\,\sin\frac{-b-c}{2}$$

$$= 4\,.\,\sin\frac{a+b}{2}\,.\,\sin\frac{a+c}{2}\,.\,\sin\frac{b+c}{2} = 1^{er} \text{ membre.}$$

(2) Appliquons les formules d'addition et distribuons.
Le résultat final doit être une constante.

$$\cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a+x) + \cos^2(a+x)$$

$$= \cos^2 x - 2.\cos a.\cos x.(\cos a.\cos x - \sin a.\sin x)$$
$$+ (\cos a.\cos x - \sin a.\sin x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2\cos^2 a.\cos^2 x + 2\cos a.\cancel{\cos x}.\sin a.\sin x$$
$$+ \cos^2 a.\cos^2 x - 2.\cos a.\cancel{\cos x}.\sin a.\sin x + \sin^2 a.\sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - \cos^2 a.\cos^2 x + \sin^2 a.\sin^2 x$$

$$= \cos^2 x.(1-\cos^2 a) + \sin^2 a.\sin^2 x$$

$$= \cos^2 x.\sin^2 a + \sin^2 a.\sin^2 x$$

$$= \sin^2 a.(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) = \sin^2 a.$$

---

(3) Si a, b et c sont les mesures des angles intérieurs d'un triangle, alors

$$a+b+c=\pi$$

et on peut par exemple remplacer c par $\pi-(a+b)$ pour démontrer les égalités.

a) 1^{er} membre $= \sin a + \sin b - \sin c$

$$= 2.\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} - \sin[\pi-(a+b)]$$ SIMPSON et

$$= 2.\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} - \sin(a+b)$$ car $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$$= 2.\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} - 2.\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}$$

car $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$= 2.\sin\frac{a+b}{2}.\left[\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right]$$

$$= 2.\sin\frac{a+b}{2}.(-2).\sin\frac{\frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2}}{2}.\sin\frac{\frac{a-b}{2}-\frac{a+b}{2}}{2}$$ (SIMPSON $\cos p - \cos q$

$$= -4.\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a}{2}.\sin\left(\frac{-b}{2}\right) = 4.\sin\frac{\pi-c}{2}.\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2}$$

$\left(\sin\left(-\frac{b}{2}\right) = -\sin\frac{b}{2}\right.$

$$= 4.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right).\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2} = 4.\cos\frac{c}{2}.\sin\frac{a}{2}.\sin\frac{b}{2} = 2^{nd}$$ membre

b) 1^{er} membre $= \cot a.\cot b + \cot b.\cot c + \cot c.\cot a$

$= \cot a.\cot b + \cot c.(\cot b + \cot a)$

$= \cot a.\cot b + \cot[\pi-(a+b)].\left(\dfrac{\cos b}{\sin b} + \dfrac{\cos a}{\sin a}\right)$

$(\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha)$

$= \cot a.\cot b - \cot(a+b).\dfrac{(\cos b.\sin a + \cos a.\sin b)}{\sin b.\sin a}$

$= \dfrac{\cos a}{\sin a}.\dfrac{\cos b}{\sin b} - \dfrac{\cos(a+b)}{\cancel{\sin(a+b)}}.\dfrac{\cancel{\sin(a+b)}}{\sin b.\sin a}$

$= \dfrac{\cos a.\cos b - \cos(a+b)}{\sin a.\sin b} = \dfrac{\cancel{\cos a.\cos b} - \cancel{\cos a.\cos b} + \sin a.\sin b}{\sin a.\sin b}$

$= 1 = 2^{nd}$ membre.

c) 1^{er} membre $= \dfrac{\cos a}{\sin b.\sin c} + \dfrac{\cos b}{\sin c.\sin a} + \dfrac{\cos c}{\sin b.\sin a}$

$= \dfrac{\cos a.\sin a + \cos b.\sin b + \cos c.\sin c}{\sin a.\sin b.\sin c}$ $(*)$

Développons d'abord le numérateur :

$\cos a.\sin a + \cos b.\sin b + \cos[\pi-(a+b)].\sin[\pi-(a+b)]$

$= \cos a.\sin a + \cos b.\sin b - \cos(a+b).\sin(a+b)$

$= \cos a.\sin a + \cos b.\sin b - (\cos a.\cos b - \sin a.\sin b).(\sin a.\cos b + \sin b.\cos a)$

$= \cos a.\sin a + \cos b.\sin b - \cos a.\sin a.\cos^2 b - \cos^2 a.\cos b.\sin b$
$+ \sin^2 a.\sin b.\cos b + \sin a.\cos a.\sin^2 b$

$= \cos a.\sin a + \cos b.\sin b + \sin a.\cos a.(\sin^2 b - \cos^2 b)$
$+ \sin b.\cos b.(\sin^2 a - \cos^2 a)$

$= \cos a.\sin a.(\underbrace{1+\sin^2 b - \cos^2 b}_{2.\sin^2 b}) + \cos b.\sin b.(\underbrace{1+\sin^2 a - \cos^2 a}_{2.\sin^2 a})$

(car $1-\cos^2 b = \sin^2 b$)

$= 2\cos a.\sin a.\sin^2 b + 2\cos b.\sin b.\sin^2 a$

$= 2\sin a.\sin b.(\cos a.\sin b + \sin a.\cos b) = 2\sin a.\sin b.\sin(a+b)$

$= 2\sin a.\sin b.\sin(\pi-c) = 2.\sin a.\sin b.\sin c$

Retour à $(*)$: $\dfrac{2\sin a.\sin b.\sin c}{\sin a.\sin b.\sin c} = 2 = 2^{nd}$ mbre

(4) 1°/ $\tan c = \tan[\pi - (a+b)] = -\tan(a+b)$

2°/ $\tan c = \tan\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot b = -\frac{1}{\tan b}$

Donc $\tan(a+b) = \frac{1}{\tan b}$

$$\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b} = \frac{1}{\tan b}$$

$\rightarrow \tan a . \tan b + \tan^2 b = 1 - \tan a . \tan b$

$\rightarrow 2 \tan a . \tan b + \tan^2 b - 1 = 0 \quad (*)$

Reprenons l'expression

$2 \tan a + \tan b + \tan c$

$= 2 \tan a + \tan b - \frac{1}{\tan b}$

$= \frac{2 \tan a . \tan b + \tan^2 b - 1}{\tan b}$ → le numérateur est nul d'après (*)

$= \frac{0}{\tan b} = 0.$

Si l'on sait que $\tan b + \tan c = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

on a : $2 \tan a + \tan b + \tan c = 0$

$2 \tan a - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$

$\rightarrow \tan a = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = \frac{\pi}{6}$

Donc $b + c = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

or, $b - c = \frac{\pi}{2}$

Additionnons m. à m. $\rightarrow 2b = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{6} \rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$

et $c = b - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow c = \frac{\pi}{6}$

(5) Si $\tan b = \dfrac{\cos(c-b)}{\sin a + \sin(c-b)}$, montrer que le triangle est rectangle.

Transformons d'abord le dénominateur :

$$\begin{aligned}\sin a + \sin(c-b) &= \sin[\pi - (b+c)] + \sin(c-b)\\ &= \sin(b+c) + \sin(c-b)\\ &= 2.\ \sin\frac{b+c+c-b}{2} . \cos\frac{b+c-c+b}{2}\\ &= 2.\ \sin c .\ \cos b\end{aligned}$$

Remplaçons dans la relation de départ :

$$\tan b = \frac{\cos(c-b)}{2\sin c . \cos b}$$

$$\frac{\sin b}{\cancel{\cos b}} = \frac{\cos c . \cos b + \sin c . \sin b}{2 . \sin c . \cancel{\cos b}}$$

$\rightarrow$ $2 . \sin b . \sin c = \cos c . \cos b + \sin c . \sin b$

$\rightarrow$ $\cos b . \cos c - \sin b . \sin c = 0$

$\rightarrow$ $\cos(b+c) = 0$ Donc $b + c = \frac{\pi}{2}$

et $a = \frac{\pi}{2}$

---

(6) Même question sachant que $\sin a - \cos a = \cos b - \sin b$.

$$\sin a - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b - \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

$$2 . \sin\frac{a - \frac{\pi}{2} + a}{2} . \cos\frac{a + \frac{\pi}{2} - a}{2} = -2 . \sin\frac{b + \frac{\pi}{2} - b}{2} . \sin\frac{b - \frac{\pi}{2} + b}{2}$$

$$\cancel{2} . \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) . \underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{4}}}_{\sqrt{2}/2} = -\cancel{2} . \underbrace{\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}}_{\sqrt{2}/2} . \sin\left(b - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) &= -\sin\left(b - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - b\right)\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $a - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - b + \cancel{k . 2\pi}$

$\longrightarrow$ $a + b = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ $c = \frac{\pi}{2}$ le Δ est bien rectangle.

(7) Si $\sin 3a + \sin 3b + \sin 3c = 0$

montrer qu'un des angles du triangle mesure 60°.

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot \cos\frac{3a-3b}{2} + \underbrace{\sin\left[3\left(\pi-(a+b)\right)\right]}_{(*)} = 0$$

(*) $\sin\left[3\pi - 3(a+b)\right] = \sin\left[3(a+b)\right]$

car $\sin(3\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot \cos\frac{3a-3b}{2} + \sin\left[3(a+b)\right] = 0$$

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot \cos\frac{3a-3b}{2} + 2 \cdot \sin\frac{3(a+b)}{2} \cdot \cos\frac{3(a+b)}{2} = 0$$

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot \left[\cos\frac{3a-3b}{2} + \cos\frac{3a+3b}{2}\right] = 0$$

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{\frac{3a-\cancel{3b}+3a+\cancel{3b}}{2}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\cancel{3a}-3b-\cancel{3a}-3b}{2}}{2} = 0$$

$$2 \cdot \sin\frac{3a+3b}{2} \cdot 2 \cdot \cos\frac{3a}{2} \cdot \cos\left(-\frac{3b}{2}\right) = 0$$

1ère possibilité : $\sin\frac{3a+3b}{2} = 0$

$\rightarrow \frac{3a+3b}{2} = 180° \rightarrow a+b = 120°$

$\rightarrow c = 60°$

2ème possibilité : $\cos\frac{3a}{2} = 0$

$\rightarrow \frac{3a}{2} = 90° \rightarrow a = 60°$

3ème possibilité : $\cos\left(-\frac{3b}{2}\right) = \cos\frac{3b}{2} = 0$

$\rightarrow \frac{3b}{2} = 90° \rightarrow b = 60°$