DEUX PROBLÈMES DE TRIGONOMÉTRIE - UMONS

Démontrer l'identité suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\sin(78°) - \sin(18°) + \cos(132°) = 0 .$$

(2009)

Solution

Les deux premiers termes - une différence de sinus - incitent à utiliser une formule de SIMPSON :

$$\sin(78°) - \sin(18°) + \cos(132°) = 2 \,.\, \sin\frac{78° - 18°}{2} \,.\, \cos\frac{78° + 18°}{2} + \cos(132°)$$

$$= 2 \,.\, \sin(30°) \,.\, \cos(48°) + \cos(132°)$$

À ce stade, il y a deux choses intéressantes à observer :

- $\sin(30°)$ est une valeur particulière qu'il faut connaître (½) ;
- il y a un lien entre 48° et 132° : ce sont des angles supplémentaires.

$$= 2 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \cos(48°) + \cos(180° - 48°)$$

Et il faut aussi savoir que les cosinus de deux angles supplémentaires sont opposés :

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ (en radians $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$).

Finalement, on obtient : $\cos(48°) - \cos(48°) = 0$.

Démontrer que l'identité suivante est vérifiée dans tout triangle ABC :

$$\frac{\sin B}{\cos\left(\dfrac{B - C}{2}\right)} = \frac{2b.\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)}{b + c} .$$

(2016)

Solution

Voilà le genre d'énoncé qui a un côté effrayant pour beaucoup d'étudiants.
Comme toujours, un temps d'observation est nécessaire pour s'orienter et trouver un chemin.

D'abord, la présence simultanée de nombres trigonométriques d'angles du triangle et de longueurs de ses côtés fait penser à la relation des sinus.

Dans tout triangle, nous avons en effet : $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

Ensuite, nous voyons davantage les lettres b et c que la lettre a .
Le A qui se trouve dans $\cos(A/2)$ semble être un intrus et le remplacer en fonction des deux autres est peut-être une bonne idée.
Puisque nous sommes dans un triangle, nous avons $A + B + C = \pi$ et donc $A = \pi - (B + C)$.

Après cette phase d'observation, voici une solution possible.

Débarassons-nous d'abord du « A » : $\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi-(B+C)}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)=\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$.

En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ (propriété des angles complémentaires).

Démontrer que $\dfrac{\sin B}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\dfrac{2b.\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$ revient donc à prouver que :

$$\frac{\sin B}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{2b.\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{b+c}\ .$$

Les facteurs $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$ font penser à une formule de SIMPSON.

En effet : $\sin B+\sin C=2.\sin\left(\frac{B+C}{2}\right).\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$.

Poursuivons nos transformations de l'égalité à démontrer :

$$\sin B=\frac{2b.\sin\left(\frac{B+C}{2}\right).\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{b+c} \quad\Leftrightarrow\quad \sin B=\frac{b.(\sin B+\sin C)}{b+c}\quad (*)\ .$$

Nous sommes proches du but. Mais comment démontrer la dernière égalité ?
Transformons de nouveau en multipliant les deux membres par $(b+c)$:

$$\begin{aligned}\sin B.(b+c)=b.(\sin B+\sin C) &\Leftrightarrow \underline{b.\sin B}+c.\sin B=\underline{b.\sin B}+b.\sin C\\ &\Leftrightarrow c.\sin B=b.\sin C\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie dans tout triangle en vertu de la règle des sinus.

<u>Remarque</u>

À l'étape (*) $\sin B=\dfrac{b.(\sin B+\sin C)}{b+c}$, nous pourrions être tenté d'écrire $\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin B+\sin C}{b+c}$.

C'est l'occasion d'une petite digression sur les fractions (page suivante).

Dans la suite, pour toute fraction que nous écrivons, le dénominateur est supposé non nul.

Partons de l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La propriété bien connue des élèves du secondaire est : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Elle s'énonce souvent « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ».

En voici une autre qui peut s'avérer très utile.

Partons par exemple de la fraction 2/3 et écrivons d'autres fractions équivalentes :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \ldots$$

Observons … En additionnant deux numérateurs quelconques, et en divisant par la somme des dénominateurs correspondants, nous trouvons une fraction équivalente à celle de départ.

Par exemple : $\frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9}$, $\frac{4+8}{6+12} = \frac{12}{18}$, $\frac{10+14}{15+21} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, …

Nous pouvons conjecturer la propriété suivante :

$$\boxed{\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{alors} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$$

Plus généralement : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{i}{j} = \frac{a+c+e+g+i}{b+d+f+h+j}$.

<u>Preuve de la propriété encadrée</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \underline{ba} + ad = \underline{ba} + bc \Leftrightarrow a(b+d) = b(a+c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} .$$

Connaître cette propriété permet parfois de prendre des « raccourcis » dans des problèmes d'algèbre, mais aussi de géométrie. Pensez à des situations où interviennent le théorème de THALÈS, ou des triangles semblables, et où l'on écrit des égalités entre rapports de longueurs.
Il peut parfois être intéressant de considérer le rapport des sommes de ces longueurs …

Revenons à la remarque de la page précédente.

Sachant que $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, la propriété ci-dessus nous assure directement que

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{b+c} .$$