UMONS
Université de Mons

POLYTECH MONS

# TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

**Examen d'admission, juillet 2014 (durée 2h30')**

La résolution des questions ne requiert que l'utilisation

- des formules trigonométriques donnant :
  sin (-a), cos(-a), tg(-a);
  sin (π ± a), cos (π ± a), tg(π ± a);
  sin (π/2 ± a), cos (π/2 ± a), tg (π/2 ± a);
  sin (a ± b), cos (a ± b), tg (a ± b);
  sin 2a, cos 2a, tg 2a;
  sin p ± sin q, cos p ± cos q;
  1 ± cos 2a;
  sin a, cos a, tg a en fonction de tg a/2;

- des relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle et d'un triangle quelconque (relations aux sinus et formules $a^2=b^2+c^2...$, $b^2=...$, $c^2=...$).

**Toute autre formule trigonométrique utilisée doit être démontrée.**

**Vous êtes tenus de répondre à trois questions sur les quatre proposées, chacune valant un tiers des points. Seules les trois questions choisies seront corrigées.**

**Question 1 :** Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan(x)+\tan(3x)+\sin(2x)=0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

**Question 2 :** Vérifier l'identité suivante:

$$\frac{\cot(x)\cdot\cot(2x)-1}{\cot(x)\cdot\cot(2x)+1}=\cos(2x)-\sin(2x)\cdot\tan(x)$$

**Question 3 :** Par un point fixe **P** d'un segment **AB**, on mène une perpendiculaire à **AB**. Elle coupe en **D** et **E** les côtés **AC** et **BC** d'un triangle **ABC** inscrit à un demi-cercle de diamètre **AB**.
Montrer que le produit entre **PD** et **PE** est une constante quelle que soit la position du point **C** sur le cercle.
Calculer ensuite la valeur de cette constante lorsque le point **P** est situé aux ¾ d'un segment **AB** de 12 cm de longueur.

**Question 4 :** Dans l'angle formé par un mur érigé verticalement par rapport au sol horizontal, une petite balle de rayon ***r*** vient se coincer. Une balle de plus grand rayon (***R***) vient, elle aussi, se caler dans cet angle et cacher la plus petite.

Les centres de ces balles (sphériques) se trouvant dans le même plan, perpendiculaire au mur et au sol, quelle est la condition géométrique (relation entre ***R*** et ***r***) pour que la grande balle (supposée indéformable) bloque la plus petite sans l'écraser ?

Qu'adviendra-t-il si la grande balle est un ballon de football (diamètre de 22 cm) et la petite balle est une balle de ping-pong (diamètre de 4 cm) ?

# TRIGONOMÉTRIE (MONS juillet 2014)

① Résoudre et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

---

Conditions d'existence : $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Il existe une formule de Simpson pour les tangentes

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \,.\, \cos q}.$$

Si on ne s'en rappelle plus, on retrouve facilement ce résultat :

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \sin 2x = 0$$

$$\frac{\overbrace{\sin x \,.\, \cos 3x + \sin 3x \,.\, \cos x}^{\sin(x+3x)}}{\cos x \,.\, \cos 3x} + \sin 2x = 0$$

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \,.\, \cos 3x} + \sin 2x = 0$$

Développons $\sin 4x$ et multiplions les deux membres par $(\cos x \,.\, \cos 3x)$ :

$$2 \,.\, \sin 2x \,.\, \cos 2x + \sin 2x \,.\, \cos x \,.\, \cos 3x = 0$$

$$\sin 2x \,.\, \left(2 \cos 2x + \cos x \,.\, \cos 3x\right) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \text{ou} \quad 2 \,.\, \cos 2x + \cos x \,.\, \cos 3x = 0 \quad (*)$$

$2x = k\pi$

$x = k\frac{\pi}{2}$

à rejeter pour $k$ impair

acceptable si $k$ pair

→ $x = k^*\pi$

avec $k^* \in \mathbb{Z}$

donc : $x = \ldots -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$

inversion formule de Simpson

transformation produit en somme

$$2 \cos 2x + \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right) = 0$$

$$\frac{5}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{5}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cos^2 2x - 1\right) = 0$$

$$\cos^2 2x + \frac{5}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} = 0$$

→

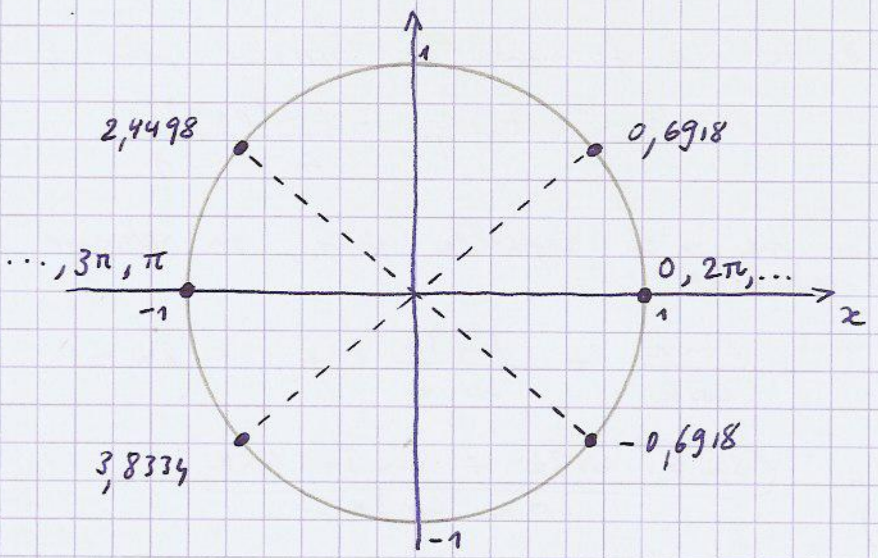
$\Delta = \frac{25}{4} + 2 = \frac{33}{4} \rightarrow \quad \cos 2x = \dfrac{-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}}{2}$

$$\cos 2x = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$\cos 2x = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$ ou $\cos x = \underbrace{-\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}}_{< -1}$

$2x \simeq \pm 1,3836 + k.2\pi$

$x \simeq \pm 0,6918 + k.\pi$ $(**)$ à rejeter.




Autre façon : revenons à l'équation $(*)$

on peut démontrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(exercice : $\cos(x + 2x) = \ldots$)

L'équation s'écrit :

$$2.\underbrace{\cos 2x}_{(2\cos^2 x - 1)} + \cos x.\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = 0$$

$$4\cos^2 x - 2 + 4\cos^4 x - 3\cos^2 x = 0$$

$$4\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$$

$\Delta = 33 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$ $\left(\frac{-1-\sqrt{33}}{8} < 0\right.$ à rejeter$\left.\right)$

$\rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}}$

$\cos x \simeq 0,77011$ ou $\cos x \simeq -0,77011$

$x \simeq \pm 0,6918 + k.2\pi$ ou $x \simeq \pm 2,4498 + k.2\pi$

Solutions équivalentes à $(**)$

② Vérifier l'identité

$$\frac{\cot x \cdot \cot 2x - 1}{\cot x \cdot \cot 2x + 1} = \cos 2x - \sin 2x \cdot \tan x$$

1er membre

$$\frac{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - 1}{\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 1} = \frac{\frac{\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x}{\cancel{\sin x \cdot \sin 2x}}}{\frac{\cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x}{\cancel{\sin x \cdot \sin 2x}}}$$

formules $\cos(a \pm b) \rightarrow$ $= \frac{\cos(x+2x)}{\cos(x-2x)} = \frac{\cos 3x}{\cos x}$

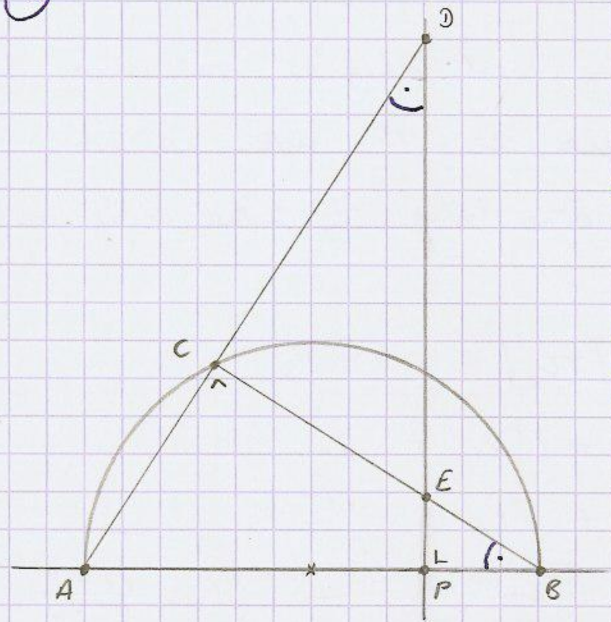
2nd membre

$$\cos 2x - \sin 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos(2x+x)}{\cos x} = \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

---

③




Le $\Delta$ ABC est rectangle en C car inscrit dans un demi-cercle.

Donc, les angles $\widehat{ADP}$ et $\widehat{EBP}$ ont des côtés perpendiculaires deux à deux et sont donc de même amplitude.
De plus,
Comme les triangles ADP et EBP sont tous deux rectangles par construction, ils sont semblables :

$$\frac{ADP}{EBP} \Rightarrow \frac{|AP|}{|EP|} = \frac{|DP|}{|BP|}$$

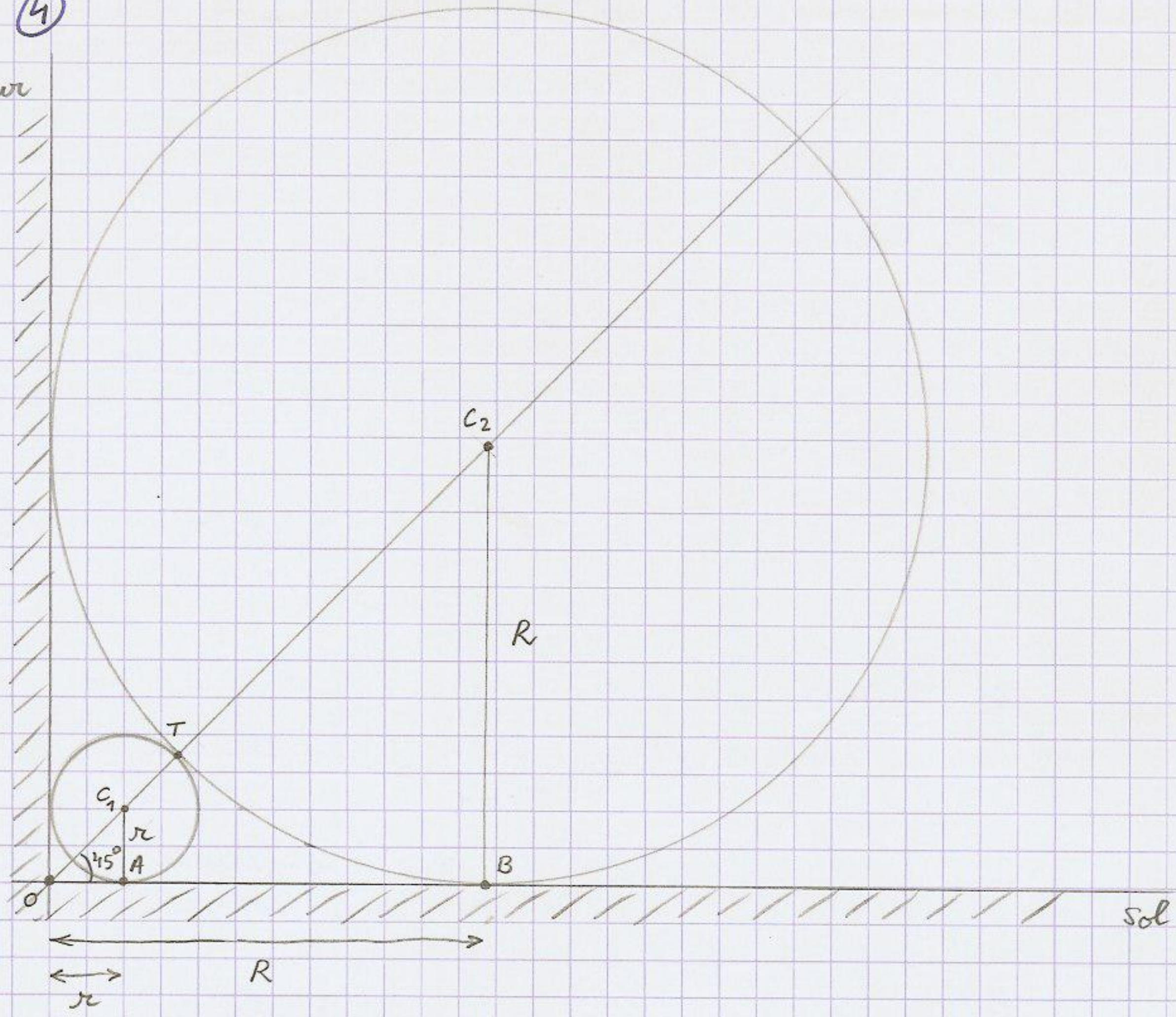
$$\Rightarrow |DP| \times |EP| = |AP| \times |BP|$$

Comme P est fixé sur [AB], |AP| et |BP| sont des mesures constantes et leur produit aussi.

Donc $|PD| \times |PE| = c^{te}$ cqfd.

Si P est aux $\frac{3}{4}$ d'un segment [AB] de 12 (cm) de long, cette constante vaut $9 \times 3 = 27$

④




Les point O, $C_1$ et $C_2$ sont alignés sur une droite qui forme un angle de 45° avec le sol.

Les sphères doivent être tangentes entre elles au point T, il faut donc que :

$$\underbrace{|OT|} + |TC_2| = \sqrt{2}.R$$

$$|OC_1| + |C_1T| + |TC_2| = \sqrt{2}.R$$

$$\sqrt{2}\,r + r + R = \sqrt{2}.R$$

$$(\sqrt{2}+1)\,r = (\sqrt{2}-1)\,R \longrightarrow R = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.r$$

ou encore : $R = \frac{(\sqrt{2}+1).(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1)}.r = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}.r$

$\rightarrow$ $\boxed{R = (3+2\sqrt{2}).r}$

Par exemple, si $r = 1$ (cm) comme dans la figure ci-dessus, $R \simeq 5{,}83$ (cm).

Si $r = 2$ (cm) (balle de ping-pong) il faut $\left( R = 6 + 4\sqrt{2} \simeq 11{,}6569 \text{ (cm)} \right.$ pour que le ballon de foot soit tangent.

Mais son rayon 11 (cm) est trop petit et il "écrase" la petite balle.