Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(\sin x + \cos x) - 8 \sin x \cos x = 5$.

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique (bien qu'elles ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique).

Suggestion : poser $y = \sin x + \cos x$

La présence du terme $8.\sin x.\cos x$ fait penser à un double produit et suggère d'élever y au carré :

$$y^2 = \sin^2 x + 2.\sin x.\cos x + \cos^2 x$$

$$y^2 = 1 + 2.\sin x.\cos x$$

$$\longrightarrow \quad 2 \sin x \cos x = y^2 - 1$$

L'équation peut donc s'écrire :

$$4y - 4.(y^2-1) = 5 \iff 4y - 4y^2 + 4 = 5$$

$$\iff -4y^2 + 4y - 1 = 0$$

[normal car l'équation est $-(2y-1)^2 = 0$]

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \longrightarrow y = \frac{-4}{-8} = 1/2$$

Donc $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

On peut penser à une formule de Simpson :

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$2 . \sin \frac{\cancel{x} + \frac{\pi}{2} - \cancel{x}}{2} . \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{2} . \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} . \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Solutions : $\boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + k.2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$