Résoudre des équations « incomplètes » du second degré

Une équation du second degré d'inconnue x est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Pour que l'équation soit du second degré, a doit être un nombre réel non nul, tandis que b et c sont des nombres réels quelconques.

Lorsque b est nul ou c est nul, l'équation est dite *incomplète*.

① Premier cas : $b = 0$ et $c = 0$

L'équation (1) se réduit à : $ax^2 = 0$. Elle a une seule solution : $x = 0$.

Exemple : $8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

② Deuxième cas : $b = 0$ et $c \neq 0$

L'équation (1) se réduit à : $ax^2 + c = 0$.

Méthode : isoler le terme en x^2 ou utiliser une différence de deux carrés.

Exemple 1 : $4x^2 - 28 = 0$

Isolons x^2 : $4x^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$. Donc : $S = \left\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$.

Exemple 2 : $4x^2 - 25 = 0$.

L'équation peut se résoudre comme celle de l'exemple 1 (faites-le !), mais certains préfèrent exploiter la différence de deux carrés :

$$(2x-5)(2x+5) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{5}{2}. \text{ Donc : } S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}.$$

Exemple 3 : $4x^2 + 25 = 0$.

Il ne s'agit pas d'une différence de deux carrés. Isolons x^2 : $4x^2 = -25$.
La conclusion est immédiate : le premier membre étant positif et le second membre strictement négatif, cette égalité n'est jamais vérifiée. Cette équation n'a pas de solution : $S = \varnothing$.

③ Troisième cas : $b \neq 0$ et $c = 0$

L'équation (1) se réduit à : $ax^2 + bx = 0$.

Méthode : factoriser par mise en évidence. Notons bien que $x = 0$ sera toujours solution.

Exemple : $4x^2 + 25x = 0$.

$$x(4x+25) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{25}{4}. \text{ Donc : } S = \left\{-\frac{25}{4}, 0\right\}.$$

④ Quatrième cas : $b \neq 0$ et $c \neq 0$

Voyez la fiche sur les équations complètes du second degré.

Exercices

Premier cas

a) $5x^2 = 0$ b) $-3x^2 = 0$ c) $\frac{1}{2}mv^2 = 0$ (inconnue v)

Deuxième cas

a)	$9x^2 - 36 = 0$	e)	$5x^2 = 20$	i)	$-3 = 3x^2$
b)	$x^2 - 225 = 0$	f)	$-24 - 6x^2 = 0$	j)	$4 = 8x^2$
c)	$7x^2 - 21 = 0$	g)	$125 - 9x^2 = 0$	k)	$\frac{x^2}{9} - 4 = 0$
d)	$2x^2 + 8 = 0$	h)	$7x^2 - 7 = 0$	l)	$3 - 12x^2 = 0$

Troisième cas

a)	$3x^2 - 21x = 0$	e)	$18x^2 - \frac{1}{2}x = 0$	i)	$\frac{3}{4}x = 6x^2$
b)	$x^2 - x = 0$	f)	$-x^2 + 5x = 0$	j)	$x = -2x^2$
c)	$x^2 - \frac{1}{4}x = 0$	g)	$\sqrt{2}x^2 - x = 0$	k)	$-x^2 - \frac{2}{3}x = 0$
d)	$4x^2 - 2x = 0$	h)	$2x + 5x^2 = 0$	l)	$-5x + 3x^2 = 0$

Un assortiment …

a)	$5x^2 + 10x = 0$	e)	$5x^2 + 10 = 0$	i)	$-10x^2 - 6x = 0$
b)	$1 = \frac{1}{4}x^2$	f)	$-\frac{2}{3}x^2 = 0$	j)	$2x^2 = -x$
c)	$7x = 3x^2$	g)	$\frac{2x^2}{3} - 2x = 0$	k)	$-48 + 4x^2 = 0$
d)	$100x^2 - 1 = 0$	h)	$-\frac{9}{5} = -\frac{1}{15}x^2$	l)	$15x + 2 = 3x^2 + 2$